∽ Exercices ∽
Continuité, TVI et dérivabilité

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4} + \sqrt{3u_n+1} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

PARTIE A. **Algorithme**

On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir le nombre entier naturel p.

Affecter au réel U la valeur 0
Affecter à l'entier n la valeur 0
Tant que n ≤ p
    Affecter à U la valeur U/4 + √(3U+1)
    Affecter à n la valeur n+1
    Afficher U
Fin tantque
```

1. Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur saisit $p = 2$.
2. Que permet de calculer cet algorithme ? (c'est-à-dire qu'affiche-t-il ?)
3. Réécrire cet algorithme en utilisant une boucle For (pour en français) de manière à ce qu'il fasse la même chose que l'algorithme ci-contre.
4. Voici les résultats qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur saisit $p = 10$:

U (arrondi à 10^{-2} près)	1	2.25	3.35	4.16	4.71	5.07	5.29	5.43	5.51	5.57
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de la suite (u_n) et au variation de cette même suite ?

PARTIE B. **Etude d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \sqrt{3x+1}$$

***On rappelle que si** g **est du type** $g = \sqrt{u}$ **(où** u **est une fonction) alors** $g' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.*

1. Justifier que f est une fonction continue sur l'intervalle $[0;6]$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0;6]$.
3. Déduire de la question précédente le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
4. (a) On note $g(x) = f(x) - x$. Démontrer alors que, pour $x \in [0;6]$:

   $$g'(x) = \frac{3(1-\sqrt{3x+1})}{4\sqrt{3x+1}}$$

   (b) Justifier que $g'(x)$ a le même signe que $1-\sqrt{3x+1}$ si $x \in [0;6]$.

   (c) Montrer que dès lors que $x \geq 0$ alors $1-\sqrt{3x+1} \leq 0$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0;6]$.

   (d) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0;6]$ que nous noterons α puis à l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
5. Résoudre, dans l'intervalle $[0;6]$, l'équation $g(x) = 0$ (c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$).

PARTIE C. **Etude de la suite.**

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
3. Déterminer ℓ.

Continuité

Exercice 2. *Des limites à droite et à gauche réelles mais différentes*

On considère la fonction f définie sur $[0;2]$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\in[0;1] \\ x^2-1 & \text{si } x\in]1;2] \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $[0;1[$ et sur $]1;2]$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
3. f est-elle continue en 1 ?

Exercice 3. *Des limites à droite et à gauche infinies*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x\neq 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Etudier la continuité de f en 0.

Attention !

Il ne faut pas confondre cette fonction avec la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ qui est continue en tout point de son ensemble de définition !

Exercice 4. *Des limites à droite et à gauche réelles, égales mais différentes de la valeur de la fonction*

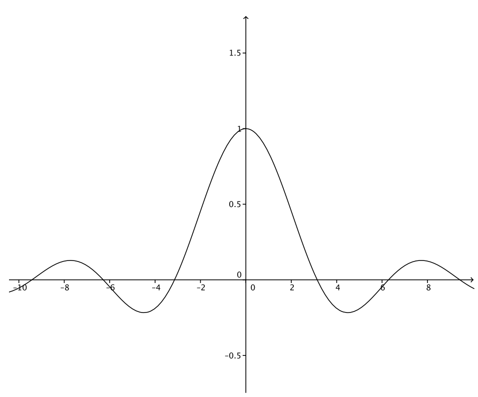
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} =1 \quad \text{Mais} f(0)=0$$

2. Que peut-on en déduire ?



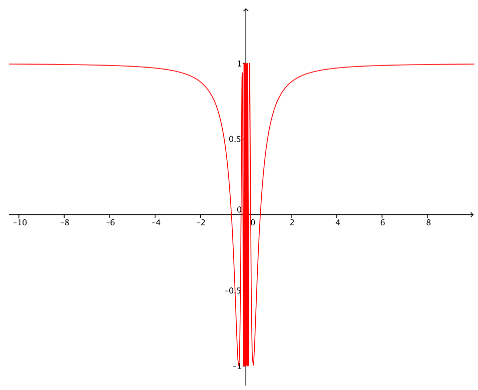
Exercice 5. *Les limites à droite et à gauche n'existent pas*

Il faut avouer que dans la pratique, presque toutes les fonctions admettent une limite à droite et à gauche. Mais il est intéressant d'avoir vu quelques contre-exemple dans sa vie.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les limites à droite et à gauche de 0 pour la fonction f.
2. Que peut-on en déduire ? On pourra dès lors répondre à l'exercice 9.



<u>Exercice</u> 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ x - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

<u>Exercice</u> 7. Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \longmapsto \sqrt{3x-1}$ sur $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$
3. $f : x \longmapsto \cos 2x$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \longmapsto |3x-1|$ sur $\mathbb{R}$

<u>Exercice</u> 8. On désigne par E la fonction partie entière. Soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ par :

$$f(x) = \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^2$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f
2. La fonction f est-elle continue sur $[-2;2]$?

<u>Exercice</u> 9. Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ a \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Est-il possible de choisir le réel a de sorte que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Théorème des valeurs intermédiares

Exercice 10. *sur les polynômes*

1. On considère le polynôme P_1 de degré 1 (autrement appelée fonction affine) définie sur $\mathbb{R}$ par : $P_1(x) = 7x + \pi$
   Déterminer les éventuelles racines de P_1.
   Remarque : D'une manière générale tout polynôme de degré 1 *admet exactement une racine.*
2. On considère le polynôme P_2 de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$P_2(x) = 7x^2 + 7x - 84$$
   Déterminer les éventuelles racines de P_2 puis donner la forme factorisée du polynôme P_2.
   Remarque : D'une manière générale tout polynôme de degré 2 *admet* 0, 1 *ou* 2 *racines et il suffit de calculer son discriminant pour le savoir.*
3. Donner un polynôme de degré 3, notée P_3, définie par sa forme factorisée admettant :
   (a) exactement une racine ;
   (b) exactement trois racines.
   Remarque : D'une manière générale tout polynôme de degré 3 *admet* 1 *ou* 3 *racines.*
4. On considère le polynôme P_3 de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$P_3(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 7$$
   (a) Déterminer les limites de P_3 en $\pm\infty$ puis établir le tableau de variation complet de P_3.
   (b) Démontrer que P_3 admet exactement une racine que nous noterons α puis :
      i. justifier que $2 < \alpha < 3$
      ii. à l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près
5. On note $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   (a) Donner les limites de P_3 en $\pm\infty$ lorsque $a > 0$ puis lorsque $a < 0$.
   (b) Expliquer pourquoi on est sûr que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.
   (c) Pour quel type de polynôme peut-on effectuer un raisonnement identique ?
   Remarque : Bien qu'il existe des formules donnant les racines lorsqu'elles existent des polynômes de degré 3*, ces dernières ne sont pas au programme de terminale et il faudra toujours utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour en donner des valeurs approchées.*
6. Donner un polynôme de degré 4, notée P_4, définie par sa forme factorisée admettant :
   (a) aucune racine ;
   (b) exactement deux racines ;
   (c) exactement quatre racines.
7. On considère le polynôme notée P_4 de degré 4 définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$P_4(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$$
   Déterminer le nombre de racine de P_4 puis les donner si elles existent à 10^{-2} près.
   Même question avec $P_4(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$.
   Remarque : Bien qu'il existe des formules donnant les racines lorsqu'elles existent des polynômes de degré 4*, ces dernières ne sont pas au programme de terminale et il faudra toujours utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour en donner des valeurs approchées. Notez qu'il n'existe pas de formule donnant les racines des polynômes de degré supérieur ou égal à* 5*, par conséquent on est obligé de procéder comme précédemment pour des polynômes dont le degré dépasse* 5.

Exercice 11.

Soit (E) l'équation $x^3+5x=2$

1. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $[0;1]$.
2. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions n'appartenant pas à l'intervalle $[0;1]$? Justifier.

Exercice 12.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=2x^3+x^2-1$$
   (a) Etudier les variations de g.
   (b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que $0,65<\alpha<0,66$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$$
   On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
   (a) Etudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
   (b) En utilisant la question 1., déterminer les variations de f et dresser son tableau de variation
   (c) Soit I le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -1 et J le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1
      i. Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à $\mathscr{C}_f$.
      ii. Déterminer une équation de la tangente T en I à $\mathscr{C}_f$
      iii. Etudier la position $\mathscr{C}_f$ par rapport à T
   (d) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x)=\frac{1}{3}(x^2+x)$$
   et $\mathscr{P}$ sa représentation graphique dans le même repère que $\mathscr{C}_f$
      i. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $x\longmapsto f(x)-h(x)$. Que peut-on dire des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{P}$ en $+\infty$ et en $-\infty$?
      ii. Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{P}$
   (e) Construire ou visualiser à la calculatrice $\mathscr{P}$, (IJ), T et la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 13. Afin de dénombrer les solutions de l'équation :
$$x(x^3-6x+1)=-1$$
on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x(x^3-6x+1)$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et la fonction dérivée f'' de f'.
2. Dénombrer les solutions de l'équation
$$4x^3-12x+1=0$$
   En donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.
3. En déduire le signe de f', puis le tableau de variation de la fonction f.
4. Conclure quant au nombre de solutions de l'équation proposée.

Exercice 14. Soit f la fonction définie, pour tout réel $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3-1}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 1$:
$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3-1)^2}$$
où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on précisera.
2. Etudier les variations de la fonction P sur $\mathbb{R}$ et démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près. En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f sur les intervalles où elle est définie.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0;-1)$
   (b) Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite T .
   (c) Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse -1.
   (d) Vérifier les résultats obtenus précédemment en visualisant à la calculatrice la courbe $\mathscr{C}_f$ et les tangentes étudiées.

Exercice 15. Pour tout entier naturel n supérieur à 2, considérons la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x) = x^n - nx + 1$$

et $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. (a) Sur l'écran d'une calculatrice, visualiser les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$
   (b) Etudier la postion relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n-1}$
2. (a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n
   (b) Quel est le sens de variation de la suite (a_n) ?

Exercice 16. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et A le point de coordonnées $(1;0)$.
L'objet de cet exercice est de déterminer le point B de la courbe $\mathscr{P}$ qui est le plus proche de A.
Dans ce but, pour tout réel x, on pose $f(x) = AM^2$, où M est le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse x.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire l'existence et l'unicité du point B et déterminer un encadrememnt d'amplitude 10^{-2} de son abscisse b.

Exercice 17. Soit f une fonction continue et définie sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0;1]$. Démontrer que f admet (au moins) un point fixe dans $[0;1]$ [1]

1. On considèrera la fonction g où $g(x) = f(x) - x$