CORRECTION DU BAC BLANC

Exercice 1. **5 points**

PARTIE A. **questionnaire à choix multiples**

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.
La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

   a. 6 **b.** 7 **c.** 10 **d.** 12

   Soit X le nombre de fois qu'un tireur atteint la cible pour n lancers. Les tirs étant indépendants, X suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0.3$ donc :
$$p_n = \text{P}(\text{X} \geq 1) = 1 - \text{P}(\text{X} = 0) = 1 - 0,7^n$$
   On cherche la valeur minimale de n vérifiant $1 - 0,7^n \geq 0,9 \iff -0.7^n \geq -0.1 \iff 0.7^n \leq 0.1$. Or, il se trouve si $n < 7$ alors $0.7^n > 0.1$ et pour $n = 7$ alors $0.7^n \leq 0.1$ donc il est nécessaire que le tireur si prenne au moins à 7 fois pour que $p_n \geq 0.9$

2. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.
La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

   a. $\dfrac{125}{3888}$ **b.** $\dfrac{625}{648}$ **c.** $\dfrac{25}{7776}$ **d.** $\dfrac{3}{5}$

   Si X désigne le nombre de succès au cours des 5 lancers, alors puisque nous répétons 5 fois de manière indépendantes la même épreuve de Bernoulli il suit que X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = \dfrac{5}{6}$ et donc :
$$\text{P}(\text{X} = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{10 \times 25}{6^5} = \frac{125}{3888}$$

3. Soient A et B deux évènements indépendants d'une même univers Ω tels que $p(\text{A}) = 0,3$ et $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0,65$. La probabilité de l'évènement B est :

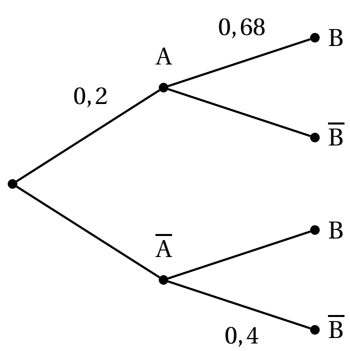
   a. 0,5 **b.** 0,35 **c.** 0,46 **d.** 0,7

   On sait que $\text{P}(\text{A} \cap \text{B}) = \text{P}(\text{A}) + \text{P}(\text{B}) - \text{P}(\text{A} \cup \text{B})$ et $\text{P}(\text{A} \cap \text{B}) = \text{P}(\text{A})\text{P}(\text{B})$ puisque A et B sont indépendants donc :
$$\text{P}(\text{B}) = \text{P}(\text{A} \cap \text{B}) - \text{P}(\text{A}) + \text{P}(\text{A} \cup \text{B}) \Longrightarrow \text{P}(\text{B}) = \text{P}(\text{A})\text{P}(\text{B}) - 0.3 + 0.65 \Longrightarrow \text{P}(\text{B})(1 - \text{P}(\text{A})) = 0.35 \Longrightarrow \text{P}(\text{B}) = \frac{0.35}{0.70} = 0,5$$

PARTIE B. **Vraie ou Faux ?**

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'arbre de probabilités suivant :



   Affirmation : la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à 0,32.

Puisque $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ il suit que :

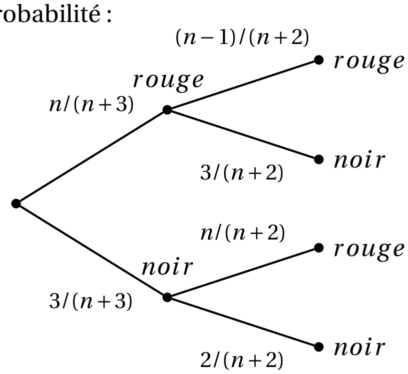
$$P_B(A) = \frac{0.2 \times 0.68}{0.2 \times 0.68 + 0.8 \times 0.6} \simeq 0,22$$

2. On considère une urne contenant n boules rouges et trois boules noires, où n désigne un entier naturel non nul. Les boules sont indiscernables au toucher.

   On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.

   Affirmation : il existe une valeur de n telle que la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\frac{9}{22}$.

   Modélisons la situation par un arbre de probabilité :



   On cherche n tel que la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes soit égale à $\frac{9}{22}$ c'est-à-dire :

$$\frac{n}{n+3} \times \frac{3}{n+2} + \frac{3}{n+3} \times \frac{n-1}{n+2} = \frac{9}{22} \Longleftrightarrow \frac{6n}{(n+3)(n+2)} = \frac{9}{22} \Longleftrightarrow 22 \times 6n = 9(n+3)(n+2) \Longleftrightarrow 44n = 3(n^2 + 5n + 6)$$

   et donc $44n = 3n^2 + 15n + 18 \Longleftrightarrow 3n^2 - 29n + 18 = 0$.

   $\Delta = (-29)^2 - 4 \times 3 \times 18 = 625$ et donc il existe deux solutions réelles :

$$n_1 = \frac{29 + \sqrt{625}}{6} = 9 \qquad et \qquad n_2 = \frac{29 - \sqrt{625}}{6} = \frac{2}{3}$$

Il existe bien un entier n, en l'occurrence 9 tel que la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes soit égale à $\frac{9}{22}$

Exercice 2. **5 points**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

(a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g et dresser le tableau de variation complet de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$g'(x) = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$$

De plus $e^x > 0$ pour tout réel x donc $g'(x)$ est du signe de $2x + x^2$.
Lorsque $x \geq 0$, on a $2x + x^2 \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.
Enfin $g(0) = 0 - 1 = -1$ et du fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\ ;\ 0{,}704[$.

g est une fonction continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ (pour preuve elle y est dérivable) et est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. De plus O appartient à l'intervalle image $[-1;+\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution.

Puisque $g(0,703) < 0$ et $g(0,704) > 0$ alors $0,703 < a < 0,704$.

(c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

g étant strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $g(a) = 0$ on obtient immédiatement :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. **Étude de la fonction f**

(a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc par somme :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

On sait que $\lim\limits_{x\to0^+} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc par somme :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

(b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

Pour tout réel strictement positif, on a :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

(c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc f' a le même signe que g et d'après la question 1)c on obtient :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

f étant décroissante sur $[0;a]$ et croissante sur $[a;+\infty[$, f admet un minimum en a qui vaut :

$$f(a) = e^a + \frac{1}{a}$$

Or, a est le réel tel que $g(a) = 0 \iff a^2e^a - 1 = 0 \iff e^a = \dfrac{1}{a^2}$

d'où : $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

(e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

On sait que $0,703 < a < 0,704 \iff \dfrac{1}{0,704} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{0,703}$

De plus $0,703 < a < 0,704 \iff 0,703^2 < a^2 < 0,704^2 \iff \dfrac{1}{0,704^2} < \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{0,703^2}$

et donc par somme :

$$3,43 < \frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,703} + \frac{1}{0,703^2} < 3,45$$

Exercice 3. 5 points

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

Il existe deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \overline{z_1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

(b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

$j = z_1$, nous venons donc effectivement de démontrer que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ c'est à dire que $j^2 + j + 1 = 0$.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme trigonométrique.

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$,

par conséquent le module de j vaut 1, un argument de j vaut $\frac{2\pi}{3}$ et sa forme trigonométrique est écrite juste au-dessus.

3. Démontrer les égalités suivantes :

(a) $j^3 = 1$;

On sait que $|j| = 1$ donc $|j^3| = |j|^3 = 1^3 = 1$.

On sait que $arg(j) = \frac{2\pi}{3}$ à 2π près donc $arg(j^3) = 3arg(j) = 3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi$ à 2π près.

Par conséquent $j^3 = 1$.

(b) $j^2 = -1 - j$.

Nous savons que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ donc $j^2 + j + 1 = 0 \Longleftrightarrow j^2 = -1 - j$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Notons que $j^2 = -1 - j = -1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{PQ} = |z_\text{Q} - z_\text{P}| = |j - 1| = \left|-\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$

$\text{PR} = |z_\text{R} - z_\text{P}| = |j^2 - 1| = \left|-\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$

$\text{QR} = |z_\text{R} - z_\text{Q}| = |j^2 - j| = \left|-\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

$\text{PQ} = \text{PR} = \text{QR} = \sqrt{3}$ donc le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \text{j}b + \text{j}^2c = 0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \text{j}(c - b)$.

$$a + \text{j}b + \text{j}^2c = 0 \Longleftrightarrow a + bj + (-1 - j)c = 0 \Longleftrightarrow a + bj - c - cj = 0 \Longleftrightarrow a - c = cj - bj \Longleftrightarrow a - c = j(c - b)$$

2. En déduire que AC = BC .

Puisque $a - c = \text{j}(c - b)$, on a

$$|a - c| = |\text{j}(c - b)| \Longleftrightarrow \text{CA} = |j| \times |c - b| = 1 \times \text{BC} \Longleftrightarrow \text{CA} = \text{BC}$$

3. Démontrer l'égalité : $a - b = \text{j}^2(b - c)$.

On a

$$a + \text{j}b + \text{j}^2c = 0 \Longleftrightarrow aj + bj^2 + cj^3 = 0 \Longleftrightarrow aj + b(-1 - j) + c = 0 \Longleftrightarrow aj - b - bj + c = 0 \Longleftrightarrow j(a - b) = b - c$$

Puis en multipliant par j^2 on obtient (puisque $j^3 = 1$) :

$$a - b = j^2(b - c)$$

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

On a observé que $j^2 = \overline{j}$ donc $|j^2| = |\overline{j}| = |j| = 1$ donc :

Puisque $a - b = j^2(b - c)$, on a

$$|a - b| = |j^2(b - c)| \iff \text{BA} = |j^2| \times |b - c| \iff \text{BA} = \text{CB}$$

BC = BA et BC = AC donc le triangle ABC est équilatéral dès que $a + bj + cj^2 = 0$.

Exercice 4. **5 points**

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

PARTIE A.

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n. Pour tout entier naturel n on a :

$$u_n + v_n = 120$$

2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).

A	B	C
n	Population en zone rurale	Population en ville
0	90	30
1	82,5	37,5
2	76,125	43,875
3	70,706	49,294
4	66,100	53,900
5	62,185	57.815
6	58,857	61,143
7	56,029	63,971
8	53,625	66,375
9	51,581	68,419
10	49,844	70,156
11	48,367	71,633
…	…	…
59	40,003	79,997
60	40,003	79,997
61	40,002	79,998

Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

La première semble converger vers 40, l'autre vers 80.

PARTIE B.

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. (a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
   Notons $\mathscr{P}(n) : u_n > u_{n+1}$
   Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 90$ et $u_1 = 0,85 \times 90 + 6 = 82.50 < u_0$
   Puisque $u_1 < u_0$, $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
   Hérédité : Montrons que si $u_n > u_{n+1}$ alors $u_{n+1} > u_{n+2}$.

$$u_n > u_{n+1} \Longleftrightarrow 0.85u_n > 0.85u_{n+1} \Longleftrightarrow 0.85u_n + 6 > 0.85u_{n+1} + 6 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_{n+2}$$

   $\mathscr{P}$ est héréditaire, étant aussi initialisée à partir de $n = 0$, nous avons démontré que la suite (u_n) est décroissante.

   (b) On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
   Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?
   (u_n) est donc minorée par 0, comme toute suite décroissante et minorée (u_n) converge vers un nombre réel (peut-être 40.)

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.

   (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   Pour tout entier naturel n on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34 = 0,85(u_n - 40)0,85w_n$$

   Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.

   (b) En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   Puisque (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 40 = 90 - 40 = 50$ on a :

$$w_n = 50 \times 0,85^n$$

   Puisque $w_n = u_n - 40$ il suit que :

$$u_n = w_n + 40 = 0.85^n + 40$$

   (c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   Puisque $v_n + u_n = 120$ il suit que :

$$v_n = 120 - u_n = 120 - (0.85^n + 40) = 80 - 0.85^n$$

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.
   $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n = 0$ il suit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 0.85^n + 40 = 40 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 120 - u_n = 120 - 40 = 80$$

   confirmant nos conjectures.

4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

(a) Que fait cet algorithme ?

$u_n \geqslant 120 - u_n \Longleftrightarrow u_n \geqslant v_n$.

L'algorithme permet d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n < v_n$.

(b) Quelle valeur affiche-t-il ?

Il affichera 6 (voir dans le tableau accompagnant le sujet).

Fin