Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°9 **SUJET A**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **(racine cubique de l'unité)**

PARTIE A. **Racines du polynôme** P

On considère le polynôme P qui a tout nombre complexe z associe le nombre complexe :

$$P(z) = z^3 - 1$$

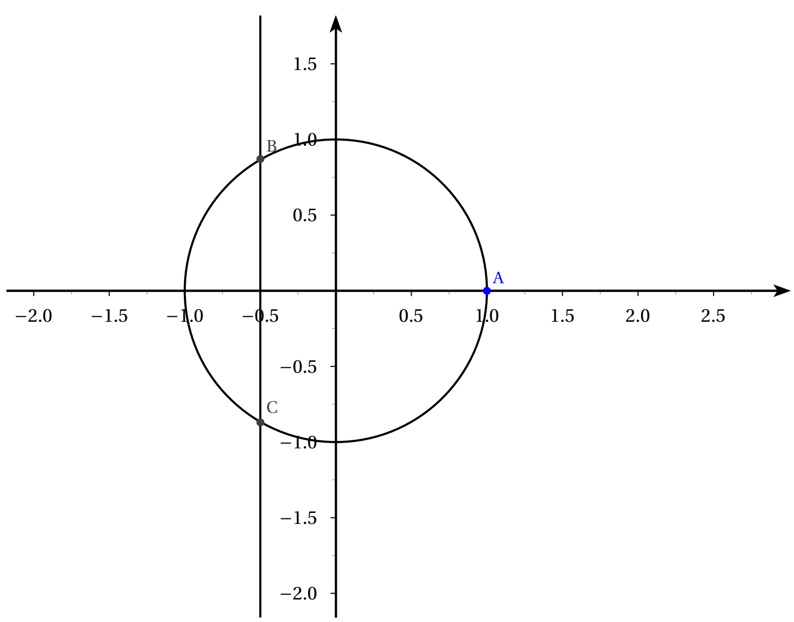
1. Vérifier que $z = 1$ est racine de P.
   $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc 1 est racine de P.
2. Vérifier que pour tout nombre complexe z on a :
   $$P(z) = (z-1)(z^2+z+1)$$
   Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $(z-1)(z^2+z+1) = z^3+z^2+z-z^2-z-1 = z^3-1 = P(z)$.
3. Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjugués :
   $$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$
4. En déduire l'ensemble des racines du polynôme P dans $\mathbb{C}$.
   $$P(z) = 0 \Longleftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \Longleftrightarrow z-1 = 0 \qquad \text{et} \qquad z^2+z+1 = 0$$
   Et donc d'après les premières questions P admet trois racines qui sont :
   $$1 \quad ; \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

PARTIE B. **Module et argument des racines**

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives

$$z_A = 1 \qquad z_B = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{et} \qquad z_C = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

1. Déterminer le module et un argument de z_A.
   $|z_A| = |1| = 1$ et $arg(z_A) = 0 + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ puisque $1 \in \mathbb{R}^+$.
2. Déterminer le module et un argument de z_B.
   $z_B = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ donc $|z_B| = 1$ et $arg(z_B) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
3. Déterminer le module et un argument de z_C.
   $z_C - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}$ donc $|z_C| = 1$ et $arg(z_B) = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
4. Justifier que les points A, B et C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1 \Longleftrightarrow OA = OB = OC = 1$ et donc A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.
5. Représenter en laissant apparent les traits de construction les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.



Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°9 **SUJET B**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **(10 points)**

PARTIE A. **Racines du polynôme P**

On considère le polynôme P qui a tout nombre complexe z associe le nombre complexe :

$$P(z) = z^4 + 1$$

1. Démontrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$z^4 + 1 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$$

Pour tout nombre complexe z on a :

$$(z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) = z^4 - \sqrt{2}z^3 + z^2 + \sqrt{2}z^3 - 2z^2 + \sqrt{2}z + z^2 - \sqrt{2}z + 1 = z^4 + 1$$

2. Résoudre l'équation $z^2 + \sqrt{2}z + 1 = 0$

$\Delta = 2 - 4 = -2$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Résoudre l'équation $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

$\Delta = 2 - 4 = -2$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. En déduire l'ensemble des racines du polynôme P dans $\mathbb{C}$.

z est racine de P si et seulement si $P(z) = 0 \Longleftrightarrow (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) = 0 \Longleftrightarrow z^2 + \sqrt{2}z + 1 = 0$ et $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

Et donc d'après les deux questions précédentes, l'ensemble des racines de P sont :

$$z_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

PARTIE B. **Module et argument des racines**

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A, B, C et D les points du plan d'affixes respectives

$$z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad z_C = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{et} \qquad z_D = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

1. Déterminer le module et un argument de z_A.

$$z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

Ainsi $|z_A| = 1$ et $arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Déterminer le module et un argument de z_B.

$$z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}$$

Ainsi $|z_B| = 1$ et $arg(z_B) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Déterminer le module et un argument de z_C.

$$z_C = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$

Ainsi $|z_C| = 1$ et $arg(z_C) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Déterminer le module et un argument de z_D.

$$z_D = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}$$

Ainsi $|z_D| = 1$ et $arg(z_D) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

5. Justifier que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 1 \iff OA = OB = OC = OD = 1$ et donc les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

6. Représenter en laissant apparent les traits de construction les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.