Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°7

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **(6 points)**

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

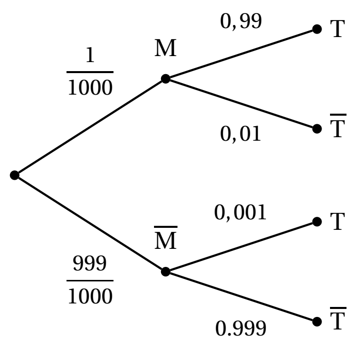
— la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;

— la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que la proportion de personnes malades parmi la population d'une métropole est d'1 pour 1000. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

   On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

   (a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.



   (b) Démontrer que la probabilité $p(\text{T})$ de l'évènement T est égale à $1,989\times 10^{-3}$.

$$p(\text{T}) = p(\text{M}\cap\text{T})+p(\overline{\text{M}}\cap\text{T}) = p(\text{M})\times \text{P}_{\text{M}}(\text{T})+\text{P}(\overline{\text{M}})\times\text{P}_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = 0,001\times 0,99+0,999\times 0,001 = 0,00099+0,000999 = 0.001989$$

   (c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

   Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

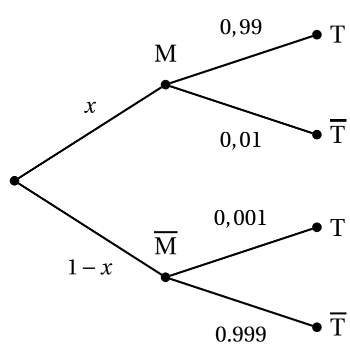
   Déterminons $\text{P}_{\text{T}}(\text{M})$:

$$\text{P}_{\text{T}}(\text{M}) = \frac{\text{P}(\text{M}\cap\text{T})}{\text{P}(\text{T})} = \frac{0,001\times 0,99}{0,001\times 0,99+0,999\times 0,001} = \frac{0,00099}{0,001989} = \frac{990}{1989} = \frac{110}{221} < \frac{110}{220} = \frac{1}{2}$$

   Effectivement si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade.

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

   À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?



   On cherche à résoudre :

$$\text{P}_{\text{T}}(\text{M}) \geq 0,95 \iff \frac{\text{P}(\text{M}\cap\text{T})}{\text{P}(\text{T})} \geq 0,95 \iff \frac{0,99x}{0,99x+0,001(1-x)} \geq 0,95 \iff \frac{0,99x}{0,989x+0,001} \geq 0,95$$

   Et puisque $0,989x+0,001$ lorsque $x>0$ on obtient :

$$0,99x \geq 0,95(0,989x+0,001) \iff 0,99x-0.93955x \geq 0,00095 \iff 0.05045x \geq 0,00095 \iff x \geq \frac{0,00095}{0,05045} = \frac{95}{5045}$$

   Ainsi dès lors qu'il y a plus de 95 malades pour 5045 personnes le laboratoire pourra commercialiser le test.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°7

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

<u>Exercice</u> 1. **(6 points)**

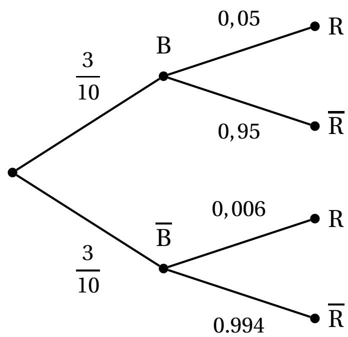
Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8h00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

L'élève part tous les jours à $7h40$ de son domicile et doit arriver à $8h00$ à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans $99,4\%$ des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive à l'heure dans 95% des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'événement « l'élève se rend au lycée à vélo », B l'événement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'événement « l'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.



2. Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap R$.

$$P(\overline{B} \cap R) = P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(R) = \frac{7}{10} \times 0.006 = \frac{7}{10} \times \frac{6}{1000} = \frac{42}{10000}$$

3. Démontrer que la probabilité de l'événement R est $0,0192$.

$$P(R) = P(B \cap R) + P(\overline{B} \cap R) = P(B) \times P_B(R) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(R) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{42}{10000} = \frac{192}{10000}$$

4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

$$P_R(B) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{5}{100}}{\frac{192}{10000}} = \frac{15}{1000} \times \frac{10000}{192} = \frac{150}{192}$$