Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°4

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (8 points)

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal. On considère les points $A(-2;0;-3)$, $B(6;6;-3)$, $C(4;4;9)$.

1. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de diamètre [AB].

 (a) Déterminer les coordonnées du centre Ω de la sphère $\mathscr{S}$ puis son rayon r.

 Puisque Ω est le centre de $\mathscr{S}$ alors Ω est le milieu de [AB] ce pourquoi :

$$\Omega\left(\frac{-2+6}{2};\frac{0+6}{2};\frac{-3+(-3)}{2}\right) \iff \Omega(2;3;-3)$$

 De plus, comme le repère est orthonormal :

$$r=\Omega A=\sqrt{(-2-2)^2+(0-3)^2+(-3+3)^2}=\sqrt{16+9+0}=5$$

 (b) En déduire l'équation de la sphère $\mathscr{S}$.

 $M(x;y;z)\in\mathscr{S} \iff \Omega M=r$

 Or, $\Omega M=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z+3)^2}$, par conséquent une équation de la sphère est :

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z+3)^2}=5 \iff (x-2)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=25$$

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AC).

 $M(x;y;z)\in(AC) \iff \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AC}$.

 Or, $\overrightarrow{AC}(6;4;12)$ donc $t\overrightarrow{AC}(6t;4t;12t)$ et $\overrightarrow{AM}(x+2;y;z+3)$. Et puisque $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AC}$, une représentation paramétrique de (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2 &=& 6t\\ y &=& 4t\\ z+3 &=& 12t\end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 6t-2\\ y &=& 4t\\ z &=& 12t-3\end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R}$$

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre $\mathscr{S}$ et (AC).

 $M(x;y;z)\in\mathscr{S}\cap(AC)$ si et seulement si ses coordonnées satisfont la représentation paramétrique de (AC) et l'équation de $\mathscr{S}$, nous sommes donc conduit à chercher les solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 6t-2\\ y &=& 4t\\ z &=& 12t-3\\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z+3)^2 &=& 25\end{array}\right.$$

 Par conséquent on cherche t tel que $(6t-4)^2+(4t-3)^2+(12t)^2=25 \iff 36t^2-48t+16+16t^2-24t+9+144t^2=25$ et donc :

$$196t^2-72t=0t(196t-72)=0 \iff t=0 \qquad \text{ou} \qquad t=\frac{72}{196}=\frac{36}{92}=\frac{18}{46}=\frac{9}{23}$$

 Pour $t=0$ nous obtenons $x=-2$, $y=0$ et $z=-3$.

 Pour $t=\frac{9}{23}$ nous obtenons $x=\frac{54}{23}-2=\frac{54-46}{23}=\frac{8}{23}$, $y=\frac{4\times 9}{23}=\frac{36}{23}$ $z=\frac{108}{23}-3=\frac{108-96}{23}=\frac{12}{23}$.

 Ainsi $\mathscr{S}$ et (AC) ont deux points d'intersection : $A(-2;0;3)$ et $K\left(\frac{8}{23};\frac{36}{23};\frac{12}{23}\right)$.

Exercice 2. (2 points)

Dans un repère on considère les points $A(4;5;-7)$ et $B(1;-4;-4)$ et la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2-t\\ y &=& -2t\\ z &=& -1-t\end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R}$$

1. Le point $N(-8;6;-7)$ appartient-il à d ?

   $N \in d$ si et seulement si ses coordonnées satisfont la représentation paramétrique de d c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -8 & = & -2-t \Longrightarrow t=6 \\ 6 & = & -2t \Longrightarrow t=-3 \\ -7 & = & -1-t \end{array}\right.$$

   Il n'existe aucun réel t permettant d'obtenir les coordonnées de N à partir de la représentation paramétrique de d, par conséquent :

$$N \notin d$$

2. d et (AB) sont-elles parallèles ?

   A partir de la représentation paramétrique de d nous connaissant un vecteur directeur, nommons le $\vec{d}(-1;-2;-1)$.

   De plus (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont les coordonnées sont $\overrightarrow{AB}(-3;-9;3)$.

   Les coordonnées des vecteurs $\vec{d}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas proportionnelles, par conséquent $\vec{d}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires et donc d et (AB) ne sont pas parallèles.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°4

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (2 points)

Dans un repère on considère les points $A(4;0;-7)$ et $B(1;-2;-4)$ et la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2-t \\ y = -2t \\ z = -1-t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Le point $N(-8;12;-7)$ appartient-il à d ?

   $N \in d$ si et seulement si ses coordonnées satisfont la représentation paramétrique de d c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel t tel que :

   $$\begin{cases} -8 = -2-t \Longrightarrow t = 6 \\ 12 = -2t \Longrightarrow t = -6 \\ -7 = -1-t \end{cases}$$

   Il n'existe aucun réel t permettant d'obtenir les coordonnées de N à partir de la représentation paramétrique de d, par conséquent :

   $$N \notin d$$

2. d et (AB) sont-elles parallèles ?

   A partir de la représentation paramétrique de d nous connaissant un vecteur directeur, nommons le $\vec{d}(-1;-2;-1)$.

   De plus (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont les coordonnées sont $\overrightarrow{AB}(-3;-2;3)$.

   Les coordonnées des vecteurs $\vec{d}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas proportionnelles, par conséquent $\vec{d}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires et donc d et (AB) ne sont pas parallèles.

Exercice 2. (8 points)

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal. On considère les points $A(-2;0;-3)$, $B(6;1;-3)$, $C(-2;4;-1)$.

1. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de diamètre [AC].

   (a) Déterminer les coordonnées du centre Ω de la sphère $\mathscr{S}$ puis son rayon r.

   Puisque Ω est le centre de $\mathscr{S}$ alors Ω est le milieu de [AC] ce pourquoi :

   $$\Omega\left(\frac{-2+(-2)}{2};\frac{0+4}{2};\frac{-3+(-1)}{2}\right) \Longleftrightarrow \Omega(-2;2;-2)$$

   De plus, comme le repère est orthonormal :

   $$r = \Omega A = \sqrt{(-2+2)^2+(0-2)^2+(-3+2)^2} = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$$

   (b) En déduire l'équation de la sphère $\mathscr{S}$.

   $M(x;y;z) \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow \Omega M = r$

   Or, $\Omega M = \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$, par conséquent une équation de la sphère est :

   $$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2} = \sqrt{5} \Longleftrightarrow (x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2 = 5$$

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

   $M(x;y;z) \in (AB) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

   Or, $\overrightarrow{AB}(8;1;0)$ donc $t\overrightarrow{AB}(8t;t;0)$ et $\overrightarrow{AM}(x+2;y;z+3)$. Et puisque $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC}$, une représentation paramétrique de (AB) est :

   $$\begin{cases} x+2 = 8t \\ y = t \\ z+3 = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 8t-2 \\ y = t \\ z = -3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre $\mathscr{S}$ et (AB).

M$(x; y; z) \in \mathscr{S} \cap$ (AB) si et seulement si ses coordonnées satisfont la représentation paramétrique de (AB) et l'équation de $\mathscr{S}$, nous sommes donc conduit à chercher les solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 8t-2 \\ y & = & t \\ z & = & -3 \\ (x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2 & = & 5 \end{array}\right.$$

Par conséquent on cherche t tel que $(8t)^2+(t-2)^2+(-1)^2=5 \iff 64t^2+t^2-4t+4+1=5$
et donc :

$$65t^2-4t=0 \iff t(65t-4)=0 \iff t=0 \qquad \text{ou} \qquad t=\frac{4}{65}$$

Pour $t=0$ nous obtenons $x=-2$, $y=0$ et $z=-3$.
Pour $t=\frac{4}{65}$ nous obtenons $x=\frac{32}{65}-2=\frac{32-130}{65}=-\frac{98}{65}$, $y=\frac{4}{65}$ $z=-3$.
Ainsi $\mathscr{S}$ et (AB) ont deux points d'intersection : A$(-2;0;3)$ et K$\left(\frac{-98}{65};\frac{4}{65};-3\right)$.