Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. *On commencera par encadrer u_n par deux suites dont on connaît la limite.*

Pour tout entier naturel n non nul on a :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Longleftrightarrow -1+1 \leq (-1)^n + 1 \leq 1+1 \Longleftrightarrow 0 \leq (-1)^n + 1 \leq 2 \Longleftrightarrow \frac{0}{n} \leq \frac{(-1)^n+1}{n} \leq \frac{2}{n}$$

Au final on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n}$.

De plus nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, autrement dit la suite (u_n) est encadrée par deux suites qui convergent vers 0, d'après le théorème des gendarmes on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exercice 2. (3 points)

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{5n-6}{12n^2 - 7n + 1}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, pour conclure il faut modifier l'expression de v_n.

$$v_n = \frac{n\left(5 - \frac{6}{n}\right)}{n^2\left(12 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{5 - \frac{6}{n}}{n\left(12 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{5 - \frac{6}{n}}{12 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

Enfin puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \dfrac{6}{n} = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 12 - \dfrac{7}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 12$ on en déduit par quotient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5 - \frac{6}{n}}{12 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{5}{12}$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

Exercice 3. (4 points)

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = w_n + n + 1$ et $w_0 = 10$

1. Démontrer par récurrence que $w_n \geq n$.

   Notons $\mathscr{P}(n) : w_n \geq n$

   - ***Initialisation*** : pour $n = 0$, $w_0 = 10 \geq 0$ donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
   - ***Hérédité*** : Montrons que si $w_n \geq n$ alors $w_{n+1} \geq n+1$
     Si $w_n \geq n$ alors $w_n + n \geq 2n$ et donc $w_n + n + 1 \geq 2n + 1$
     De plus $2n + 1 \geq n + 1$ puisque $n \in \mathbb{N}$ donc $w_{n+1} \geq n + 1$.
     $\mathscr{P}$ est héréditaire.
   - ***Conclusion*** : Puisque $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et héréditaire il suit que $w_n \geq n$ pour tout entier naturel n.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

   Nous savons que $w_n \geq n$ pour tout entier naturel n. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. *On commencera par encadrer u_n par deux suites dont on connaît la limite.*

Pour tout entier naturel n non nul on a :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Longleftrightarrow -1+n \leq (-1)^n+1 \leq 1+n \Longleftrightarrow \frac{n-1}{n} \leq (-1)^n+1 \leq \frac{n+1}{n} \Longleftrightarrow 1-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n+1}{n} \leq 1+\frac{1}{n}$$

Au final on a $1-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n+1}{n} \leq 1+\frac{1}{n}$.

De plus nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n} = 1$, autrement dit la suite (u_n) est encadrée par deux suites qui convergent vers 1, d'après le théorème des gendarmes on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Exercice 2. (3 points)

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{5n^2-6}{12n^2-7n+1}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$, pour conclure il faut modifier l'expression de v_n.

$$v_n = \frac{n^2\left(5-\frac{6}{n^2}\right)}{n^2\left(12-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{5-\frac{6}{n^2}}{12-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Enfin puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 5-\frac{6}{n^2} = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 12-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2} = 12$ on en déduit par quotient que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{5}{12}$$

Exercice 3. (4 points)

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = w_n - n - 1$ et $w_0 = -10$

1. Démontrer par récurrence que $w_n \leq -n$.

   Notons $\mathscr{P}(n) : w_n \leq -n$

   - ***Initialisation*** : pour $n=0$, $w_0 = -10 \leq -0 = 0$ donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n=0$.
   - ***Hérédité*** : Montrons que si $w_n \leq -n$ alors $w_{n+1} \leq -(n+1) = -n-1$
     Si $w_n \leq -n$ alors $w_n - n \leq -2n$ et donc $w_n - n - 1 \leq -2n-1$
     De plus $-2n-1 \leq -n-1$ puisque $n \in \mathbb{N}$ donc $w_{n+1} \leq -n-1$.
     $\mathscr{P}$ est héréditaire.
   - ***Conclusion*** : Puisque $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n=0$ et héréditaire il suit que $w_n \leq -n$ pour tout entier naturel n.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

   Nous savons que $w_n \leq -n$ pour tout entier naturel n. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ donc par comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$$