Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°1

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (4 points)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout entier naturel n.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 2^{n+1} + 1$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $u_n = 2^{n+1} + 1$ et démontrons cette propriété par récurrence :

1. ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on sait que $u_0 = 3$.
   De plus $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$, ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est vérifiée pour $n = 0$.
2. ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n = 2^{n+1} + 1$ alors $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.
   On sait que $u_{n+1} = 2u_n - 1$
   Or, d'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n = 2^{n+1} + 1$ donc :
   $$u_{n+1} = 2 \times \left(2^{n+1} + 1\right) - 1 = 2 \times 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$$
   $\mathscr{P}$ est donc héréditaire.
3. ***Conclusion*** : On vient de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Exercice 2. (6 points)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$ pour tout entier naturel n.

1. Soit $f(x) = \dfrac{1 + 2x}{2 + x}$. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, ainsi f' est de la forme $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, par conséquent pour $x \geq 0$ on a :
   $$f'(x) = \frac{2(2 + x) - (1 + 2x) \times 1}{(2 + x)^2} = \frac{4 + 2x - 1 - 2x}{(2 + x)^2} = \frac{3}{(2 + x)^2}$$
   Comme $(2 + x)^2 > 0$ pour tout réel $x \geq 0$, il suit que $\dfrac{3}{(2 + x)^2} > 0$ pour tout réel $x \geq 0$.
   Comme $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$, il suit que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $0 \leq u_n < 1$.
   Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $0 \leq u_n < 1$ et démontrons cette propriété par récurrence :
   (a) ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on sait que $u_0 = 0$.
   Or, $0 \leq 0 < 1$, ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est vérifiée pour $n = 0$.
   (b) ***Hérédité*** : Montrons que si $0 \leq u_n < 1$ alors $0 \leq u_{n+1} < 1$.
   On a $0 \leq u_n < 1$, puis comme la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ on obtient :
   $$f(0) \leq f(u_n) < f(1)$$
   Or, $f(0) = \dfrac{1}{2}$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = \dfrac{3}{3} = 1$, par conséquent :
   $$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1 \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} < 1$$
   $\mathscr{P}$ est donc héréditaire.
   (c) ***Conclusion*** : On vient de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $0 \leq u_n < 1$.
   Autre méthode pour l'hérédité qui n'utilise pas la fonction f :
   Montrons que si $0 \leq u_n < 1$ alors $0 \leq u_{n+1} < 1$.
   D'une part, si $0 \leq u_n$ alors $1 + 2u_n \geq 1 (> 0)$ et $2 + u_n \geq 2 (> 0)$, il suit que le quotient $\dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n} > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} \geq 0$
   Il nous reste à démontrer que si $u_n < 1$ alors $u_{n+1} < 1$.
   Notre objectif est donc de démontrer que $\dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n} < 1 \Longleftrightarrow 1 + 2u_n < 2 + u_n$ sachant que $u_n < 1$
   $$u_n < 1 \Longleftrightarrow 2u_n < 1 + u_n \Longleftrightarrow 1 + 2u_n < 2 + u_n \Longleftrightarrow \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n} < 1 \Longleftrightarrow u_{n+1} < 1$$

Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

CORRECTION L'INTERROGATION N°1

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (6 points)

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \frac{2}{2n+1}$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $u_n = \frac{2}{2n+1}$ et démontrons cette propriété par récurrence :

1. ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on sait que $u_0 = 2$.
   Or, $\frac{2}{2\times 0+1} = 2$, ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est vérifiée pour $n = 0$.
2. ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n = \frac{2}{2n+1}$ alors $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$.
   Par définition on a $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.
   Or, d'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n = \frac{2}{2n+1}$
   Par conséquent
   $$u_{n+1} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}} = \frac{2}{2n+3}$$
   $\mathscr{P}$ est donc héréditaire.
3. ***Conclusion*** : On vient de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice 2. (4 points)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$0 < u_n < 2$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $0 < u_n < 2$ et démontrons cette propriété par récurrence :

1. ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on sait que $u_0 = 1$.
   Or, $u_0 = 1$ et $0 < 1 < 2$, ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est vérifiée pour $n = 0$.
2. ***Hérédité*** : Montrons que si $0 < u_n < 2$ alors $0 < u_{n+1} < 2$.
   $$0 < u_n < 2 \Longrightarrow 2 < 2+u_n < 4 \Longrightarrow (0<)\sqrt{2} < \sqrt{2+u_n} < \sqrt{4} \Longrightarrow 0 < u_{n+1} < 2$$
   La deuxième implication étant du au fait que la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   $\mathscr{P}$ est donc héréditaire.
3. ***Conclusion*** : On vient de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $0 < u_n < 2$.