Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°16 **SUJET A**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **4 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-3x-1)e^{-3x}$$

1. Démontrer que $f'(x) = 9xe^{-3x}$.

$$f'(x) = -3e^{-3x} + (-3x-1)\times(-3)e^{-3x} = -3e^{-3x} + 9xe^{-3x} + 3e^{-3x} 9xe^{-3x}$$

2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (*on ne s'intéressera pas aux limites*).
Puisque $e^{-3x} > 0$ pour tout réel x, le signe de f' est le même que celui de x, par conséquent sur $\mathbb{R}^-$ on a $f'(x) \leq 0$ et donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, au contraire sur $\mathbb{R}^+$ on a $f'(x) \geq 0$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3. Calculer $\int_0^1 9xe^{-3x}dx$.

$$\int_0^1 9xe^{-3x}dx = [(-3x-1)e^{-3x}]_0^1 = -4e^{-3} + e^0 = 1 - 4e^{-3}$$

Exercice 2. **6 points**

1. Calculer les intégrales suivantes sans utiliser la formule de Newton-Leibniz :
   (a) $\int_0^5 \pi dx$
   Il s'agit ici de l'aire d'un rectangle de côté 5 et π qui vaut donc 5π.
   (b) $\int_0^3 xdx$
   Il s'agit ici de l'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent tous deux 3, donc l'aire vaut $3 \times 3/2 = 4,5$.
   (c) $\int_{-2}^2 \sin x dx$
   Il s'agit ici de l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 (une fonction impaire étant une fonction dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère) par conséquent l'intégrale considéré vaut 0.

2. En appliquant la formule de Newton Leibniz calculer les intégrales suivantes *justifier qu'il s'agit d'une aire dans chaque cas.*
   (a) $\int_{0.5}^1 \frac{1}{x}dx$
   Puisque $\frac{1}{x} > 0$ sur $[0.5;1]$ alors comme précédemment l'intégrale d'une fonction positive représente l'aire entre la représentation graphique de cette fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0.5$ et $x = 1$ et cette aire vaut en unité d'aire :

$$\int_{0.5}^1 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{0.5}^1 = \ln 1 - \ln 0.5 = \ln 2$$

   (b) $\int_0^2 x^3 dx$
   Puisque $x^3 \geq 0$ sur $[0;2]$ alors comme précédemment l'intégrale d'une fonction positive représente l'aire entre la représentation graphique de cette fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ et cette aire vaut en unité d'aire :

$$\int_0^2 x^3 dx = [x^4/4]_0^2 = 4 - 0 = 4$$

   (c) $\int_{-1}^3 5e^x dx$
   Puisque $5e^x > 0$ sur $[-1;3]$ alors comme précédemment l'intégrale d'une fonction positive représente l'aire entre la représentation graphique de cette fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$ et cette aire vaut en unité d'aire :

$$\int_{-1}^3 5e^x dx = [5e^x]_{-1}^3 = 5e^3 - 5e^{-1}$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°16 **SUJET B**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **4 points**

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln(x)$$

1. Démontrer que $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.

   On a pour $x > 0$, $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ (*on ne s'intéressera pas aux limites*).

   Il s'agit de déterminer le signe de la dérivée sur $]0;+\infty[$.

   En particulier $2\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\dfrac{1}{2} \iff x = e^{-0,5}$ d'où :

x	0		$e^{-0.5}$		$+\infty$
x	0		$+$		
$2\ln x+1$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

3. Calculer $\int_1^2 2x\ln x + x dx$.

$$\int_1^2 2x\ln x + x dx = [x^2 \ln x]_1^2 = 4\ln 2 - \ln 1 = 4\ln 2$$

Exercice 2. **6 points**

1. Calculer les intégrales suivantes sans utiliser la formule de Newton-Leibniz :

   (a) $\int_0^5 2.5 dx$

   Il s'agit de l'aire d'un rectangle de côté 5 et 2,5 d'où :

$$\int_0^5 2.5 dx = 5 \times 2,5 = 12,5$$

   (b) $\int_0^3 2x dx$

   Il s'agit de l'aire d'un triangle rectangle dont une hauteur vaut 3 relative à côté qui mesure 6 d'où :

$$\int_0^3 2x dx = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

   (c) $\int_{-2}^2 x dx$

   L'intégrale d'une fonction impaire entre -2 et 2 (i.e une fonction dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère) est nécessairement nulle :

$$\int_{-2}^2 x dx = 0$$

2. En appliquant la formule de Newton Leibniz calculer les intégrales suivantes *préciser s'il s'agit d'une aire.*

   (a) $\int_0^1 \dfrac{1}{x+1} dx$

   Sur l'intervalle $[0;1]$ il se trouve que $\dfrac{1}{x+1} > 0$, par conséquent $\int_0^1 \dfrac{1}{x+1} dx$ est l'aire situé entre la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ et vaut :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

(b) $\int_0^2 x^2+2x+1dx$

$x^2+2x+1=(x+1)^2>0$ sur $[0;2]$ donc comme précédemment l'intégrale d'une fonction positive représente l'aire entre la représentation graphique de cette fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$ et cette aire vaut en unité d'aire :

$$\int_0^2 x^2+2x+1dx=[x^3/3+x^2+x]_0^2=8/3+4+2-0-0-0=6+\frac{8}{3}$$

(c) $\int_{-1}^3 e^{-x}dx$

Puisque $e^{-x}>0$ sur $[-1;3]$ alors comme précédemment l'intégrale d'une fonction positive représente l'aire entre la représentation graphique de cette fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=3$ et cette aire vaut en unité d'aire :

$$\int_{-1}^3 e^{-x}dx=[-e^{-x}]_{-1}^3=-e^{-3}+e^1$$