**Nom :** .............. **Prénom :** .............. Classe :......

## CORRECTION DE L'INTERROGATION N°14 — SUJET A

***On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.***

**Exercice 1.** Soit $z = -e^{i\frac{\pi}{4}}$

1. Déterminer la forme exponentielle de $z$, préciser son module et son argument.

$$z = -e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Le module de $z$ vaut donc 1 et un argument de $z$ vaut $\dfrac{5\pi}{4}$.

2. Déterminer la forme algébrique de $z$.

La forme algébrique de $z$ vaut donc :

$$z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Enfin déterminer la forme exponentielle et la forme algébrique de $z^{2016}$.

La forme exponentielle de $z^{2016}$ vaut :

$$\left(-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2016} = (-1)^{2016} \times e^{i\frac{2016\pi}{4}} = 1e^{i0} = 1$$

**Exercice 2.**

1. Exprimer $\ln 500$ en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 5$.

$$\ln 500 = \ln(10 \times 10 \times 5) = \ln(5^3 \times 2^2) = 3\ln 5 + 2\ln 2$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(3-x) = 2\ln x$. (Rechercher le domaine de validité de l'équation en premier lieu.)

$x$ peut etre solution de l'équation proposée si et seulement si $3 - x > 0 \iff x < 3$ et $x > 0$ donc si et seulement si $x \in ]0;3[$.

De plus $\ln(3-x) = 2\ln x \iff \ln(3-x) = \ln(x^2) \iff 3 - x = x^2 \iff x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 13$ et donc $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ (et puisque $x \in ]0;3[$ l'équation n'a qu'une solution qui est $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de $f$ sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x')}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Or, $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff e > x$ d'où :

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ | $\nearrow$ | $1/e$ | $\searrow$ | |

**Nom :** ............... **Prénom :** ............... Classe :......

**INTERROGATION N°14** **SUJET B**

***On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.***

**Exercice 1.** Soit $z = i e^{i\frac{\pi}{3}}$

1. Déterminer la forme exponentielle de $z$, préciser son module et son argument.

$$z = i e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Le module de $z$ vaut 1 et un argument de $z$ vaut $\dfrac{3\pi}{4}$.

2. Déterminer la forme algébrique de $z$.

On a :

$$z = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Enfin déterminer la forme exponentielle et la forme algébrique de $z^{2016}$.

$$z^{2016} = \left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2016} = e^{i\frac{3\times 2016\pi}{4}} = e^{i0} = 1$$

"La" forme exponentielle de $z^{2016}$ est donc $e^{i0}$ et sa forme algébrique est 1.

**Exercice 2.**

1. Exprimer $\ln 320$ en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 5$.

$$\ln 320 = \ln(10\times 32) = \ln(5\times 2^6) = 6\ln 2 + \ln 5$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(3+x) = 2\ln x$. (Rechercher le domaine de validité de l'équation en premier lieu.)

$x$ peut être solution de cette équation si et seulement si $3+x>0 \Longleftrightarrow x>-3$ et $x>0$, autrement dit si et seulement si $x>0$.

De plus $\ln(3+x) = 2\ln x \Longleftrightarrow \ln(3+x) = \ln(x^2) \Longleftrightarrow 3+x = x^2 \Longleftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$

$\Delta = 13$ donc $x = \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ et puisque $x>0$ l'unique solution de cette équation vaut $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

3. $f(x) = x\ln x$. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de $f$ sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\times\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Or, $\ln x + 1 > 0 \Longleftrightarrow \ln x > -1 \Longleftrightarrow x > e^{-1}$ d'où :

| $x$ | $0$ | | $e^{-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $-e^{-1}$ | $\nearrow$ | |