Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°13 **SUJET A**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} - 1$$

1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc :

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

   En $+\infty$ on est en présence d'une forme indéterminée, mais on sait d'après le cours que

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

   et par conséquent :

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

2. Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $$f'(x) = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$$

   Puisque $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, $f'(x)$ a le même signe que le trinôme $2x - x^2$.
   Or, $2x - x^2 = 0 \iff x(2-x) = 0 \iff x = 0 \quad$ ou $\quad 2 - x = 0 \iff x = 0 \quad$ ou $\quad 2 = x$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$f(2) < 0$	↘	-1

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ en justifiant soigneusement.

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ par conséquent puisque $0 \in [-1; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle $]-\infty; 0]$. (on applique donc le corollaire du TVI)
   En revanche sur $[0; +\infty[$, on a $f(x) \leq f(2) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[0; +\infty[$.
   Au final $f(x) = 0$ est une équation qui admet une unique solution.

Exercice 2. On considère l'équation (E) :

$$(\mathrm{E}) : z^3 + 64 = 0$$

1. Déterminer les réels a et b tels que :

   $$z^3 + 64 = (z+4)(z^2 + az + b)$$

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

   $$(z+4)(z^2 + az + b) = z^3 + z^2(a+4) + z(4a+b) + 4b$$

   On a $z^3 + z^2(a+4) + z(4a+b) + 4b = z^3 + 64$ si et seulement si $4b = 64 \iff b = 16$, $4a + b = 0 \iff a = -4$ et $a + 4 = 0 \iff a = -4$.
   Conclusion $a = -4$ et $b = 16$.

2. Déterminer les solutions de l'équation (E).

   $$z^3 + 64 = 0 \iff (z+4)(z^2 + az + b) = 0 \iff z + 4 = 0 \qquad \text{et} \qquad z^2 - 4z + 16 = 0$$

   Ainsi $z = -4$ ou z est solution de $z^2 - 4z + 16 = 0$
   $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 16 - 64 = -48 < 0$ donc le trinôme admet deux racines complexes conjugués qui sont :

   $$z = \frac{4 + i\sqrt{48}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3} \qquad \text{ou} z = 2 - 2i\sqrt{3}$$

   L'équation (E) admet trois solutions qui sont $z = -4$, $z = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z = 2 - 2i\sqrt{3}$

3. Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -4$, $z_{\mathrm{B}} = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{C}} = \overline{z_{\mathrm{B}}}$.

(a) Déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres complexes.

$|z_A| = 4$ et $arg(z_A) = \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$|z_B| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ et un argument de z_B disons θ doit vérifier :

$$\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Et enfin vu que $z_C = \overline{z_B}$ on a $|z_C| = |z_B| = 4$ et $arg(z_C) - arg(z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(b) Déterminer la forme exponentielle de chacun des trois nombres complexes.

$$z_A = 4e^{i\pi}$$

$$z_B = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_C = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

(c) Déterminer la forme exponentielle du produit $z_A \times z_B \times z_C$

$$z_A \times z_B \times z_C = 4e^{i\pi} \times 4e^{i\frac{\pi}{3}} \times 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 64e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)} = 64e^{i\pi}$$

(d) En déduire la forme algébrique du produit.

$$64e^{i\pi} = 64\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°13 **SUJET B**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. On considère l'équation (E) :

$$(E) : z^3 + 27 = 0$$

1. Déterminer les réels a et b tels que :

$$z^3 + 27 = (z+3)(z^2 + az + b)$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$(z+3)(z^2 + az + b) = z^3 + z^2(a+3) + z(3a+b) + 3b$$

On a $z^3 + z^2(a+3) + z(3a+b) + 3b = z^3 + 27$ si et seulement si $3b = 27 \iff b = 9$, $3a + b = 0 \iff a = -3$ et $a + 3 = 0 \iff a = -3$.

Conclusion $a = -3$ et $b = 9$.

2. Déterminer les solutions de l'équation (E).

$$z^3 + 27 = 0 \iff (z+3)(z^2 - 3z + 9) = 0 \iff z + 3 = 0 \qquad \text{et} \qquad z^2 - 3z + 9 = 0$$

Ainsi $z = -3$ ou z est solution de $z^2 - 3z + 9 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 9 - 36 = -27 < 0$ donc le trinôme admet deux racines complexes conjugués qui sont :

$$z = \frac{3 + i\sqrt{27}}{2} = 3/2 + 3i\sqrt{3}/2 \qquad \text{ou} z = 3/2 - 3i\sqrt{3}/2$$

L'équation (E) admet trois solutions qui sont $z = -4$, $z = 3/2 + 3i\sqrt{3}/2$ et $z = 3/2 - 3i\sqrt{3}/2$

3. Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3$, $z_B = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ et $z_C = \overline{z_B}$.

(a) Déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres complexes.

$|z_A| = 3$ et $arg(z_A) = \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$|z_B| = \sqrt{(3/2)^2 + (3\sqrt{3}/2)^2} = 3$ et un argument de z_B disons θ doit vérifier :

$$\cos\theta = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{3/2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Et enfin vu que $z_C = \overline{z_B}$ on a $|z_C| = |z_B| = 3$ et $arg(z_C) - arg(z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(b) Déterminer la forme exponentielle de chacun des trois nombres complexes.

$$z_A = 3e^{i\pi}$$

$$z_B = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_C = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

(c) Déterminer la forme exponentielle du produit $z_A \times z_B \times z_C$

$$z_A \times z_B \times z_C = 3e^{i\pi} \times 3e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{-i\frac{\pi}{3}} = 27e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)} = 27e^{i\pi}$$

(d) En déduire la forme algébrique du produit.

$$27e^{i\pi} = 27(\cos\pi + i\sin\pi) = -27$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-x} - 1$$

1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

   En $+\infty$ on est en présence d'une forme indéterminée, mais on sait d'après le cours que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$

   et par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

2. Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} + x(-e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

   Puisque $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, $f'(x)$ a le même signe $1-x$ qui s'annule pour $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1) < 0$	$\searrow$	-1

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ en justifiant soigneusement.

   On a $f(x) \leq f(1) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.