Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°12 **SUJET A**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$ On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

   Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ on a par produit :

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

   Il n'existe donc pas d'asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

2. Etudier et déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

   On a $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + e^{-x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc au final :

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$

3. Déterminer $f'(x)$, puis étudier son signe. En déduire l'existence et la valeur du maximum de la fonction f.

   f est composé de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, par conséquent elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

   $$f'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} + x((-x)'e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
e^{-x}			$+$		
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

   f admet un maximum en $x = 1$ valant $1/e$.

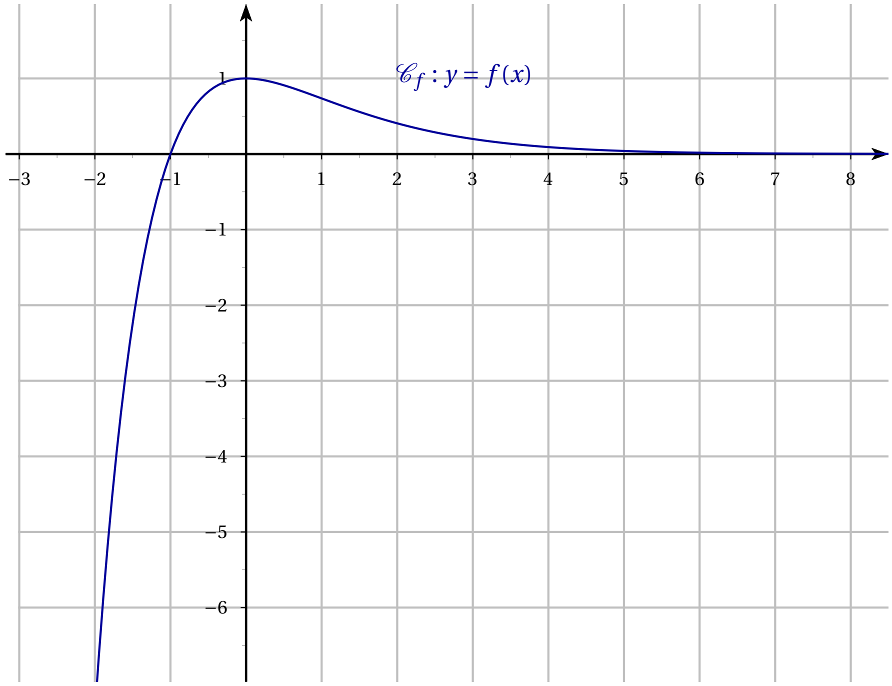
4. Déterminer l'équation de la tangente de f en 0.

   $$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1x + 0 = x$$

5. Démontrer que l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.

   Sur l'intervalle $]-\infty;1]$ f admet pour maximum $1/e < 1/2$ par conséquent l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ n'admet aucune solution sur $]-\infty;1]$.

   De plus sur $[1;+\infty[$, f est continue, strictement décroissante et à valeurs dans $[0;1/e]$ donc d'après le corollaire du TVI l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution. Une calculatrice permet d'en obtenir une valeur approchée.



Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°12 **SUJET B**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonomé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc immédiatement :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$

2. (a) Démontrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x}{e^x(1/e^x + 1)} = \frac{1}{e^{-x} + 1}$$

(b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

Du fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ on en déduit immédiatement :

$$\lim_{x\to+\infty} = 0$$

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

3. Déterminer $f'(x)$, puis étudier son signe. En déduire le tableau de variations de f.

f est composé de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, par conséquent elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
e^x		$+$	
e^x+1		$+$	
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

4. Déterminer l'équation de la tangente de f en 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

5. Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.

De plus sur $\mathbb{R}$, f est continue, strictement croissante et à valeurs dans $[0;1]$ donc d'après le corollaire du TVI l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution. Une calculatrice permet d'en obtenir une valeur approchée.