Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°11 — SUJET A

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **10 points**

On considère le nombre complexe

$$z = 1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique

$$z^2 = \left(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})\right)^2 = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 + 2i(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})^2 = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 - (1+\sqrt{3})^2 + 2i(1-3)$$

c'est-à-dire :

$$z^2 = (1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}) - 4i = -2\times 2\sqrt{3} - 4i = -4\sqrt{3}-4i$$

2. Déterminer le module et un argument de z^2

$$|z^2| = |-4\sqrt{3}-4i| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2+(-4)^2} = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8$$

Un argument θ de z^2 vérifie $\cos\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$. Par conséquent :

$$\theta = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{avec} k\in\mathbb{Z}$$

3. Indiquer le signe de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire, puis, à l'aide des propriétés sur le module et l'argument, déterminer le module et un argument de z. $1-\sqrt{3}<0$ donc la partie réelle de z est négative, tandis que $1+\sqrt{3}>0$ donc la partie imaginaire de z est positive.
Nous savons que $|z^2| = 8 \Longrightarrow |z|^2 = 8 \Longrightarrow |z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
De plus

$$arg(z^2) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow 2arg(z) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow arg(z) = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Ainsi il existe à deux π près deux arguments qui conviennent $arg(z) = -\frac{5\pi}{12}$ ou $arg(z) = -\frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{7\pi}{12}$.
Comme $-\frac{\pi}{2} < -\frac{5\pi}{12} < 0$, si l'argument de z valait $-\frac{5\pi}{12}$ la partie réelle et la partie imaginaire de z serait négative.
Par conséquent $arg(z) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

4. Déduire de ce qui précède $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$ puis $\cos\frac{\pi}{12}$ puis $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

De plus $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ donc :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°11 **SUJET B**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **10 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$.
   On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation, z_1 ayant une partie imaginaire positive.
   $\Delta = 8-4\times 4 = -8 < 0$ donc l'équation $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$ admet deux racines complexes conjugués que voici :
   $$z_1 = \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$
2. Placer, dans le plan, muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\vec{e_1},\vec{e_2})$ (unité graphique : 2 cm), les points : A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I le milieu de [AB].
3. Démontrer que le triangle OAB est isocèle.
   En déduire une mesure de l'angle $(\vec{e_1};\overrightarrow{\mathrm{OI}})$.
   $\mathrm{OA} = |z_\mathrm{A}| = 2$, $\mathrm{OB} = |z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^2} = 2$ donc le triangle OAB est isocèle. Le triangle OAB étant isocèle et I étant le milieu de [AB] alors :
   $$(\vec{e_1};\overrightarrow{\mathrm{OI}}) = (\vec{e_1};\overrightarrow{\mathrm{OB}})/2 = arg(z_1)/2$$
   Si on note $\theta = arg(z_1)$ celui ci vérifie $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}+2k\pi$ et donc :
   $$(\vec{e_1};\overrightarrow{\mathrm{OI}}) = (\vec{e_1};\overrightarrow{\mathrm{OB}})/2 = arg(z_1)/2 = \frac{3\pi}{8}+2k\pi$$
4. Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I.
   $$z_\mathrm{I} = \frac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$$
   $$|z_\mathrm{I}| = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^2}}{4} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{4}$$
5. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$
   $\frac{3\pi}{8}$ étant un argument de z_I il suit que :
   $$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{4}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}$$