Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°10 **SUJET A**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **10 points**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -5-2i \quad ; \quad z_B = 4-i \quad ; \quad z_C = 3+8i \quad \text{et} \quad z_D = 2+17i$$

1. (a) Calculer AB, AC et BC.

$$AB = |z_B - z_A| = |4-i-(-5-2i)| = |4-i+5+2i| = |9+i| = \sqrt{9^2+1^2} = \sqrt{82}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3+8i-(-5-2i)| = |8+8i+2i| = |8+10i| = \sqrt{8^2+10^2} = \sqrt{64+100} = \sqrt{164}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3+8i-(4-i)| = |3+8i-4+i| = |-1+9i| = \sqrt{(-1)^2+9^2} = \sqrt{82}$$

(b) En déduire la nature du triangle ABC.

D'une part BC = AB et donc le triangle ABC est isocèle en B.

D'autre part $AC^2 = 164$ et $BC^2 + AB^2 = 82+82 = 164$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B.

En somme ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

2. (a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe Z :

$$Z = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_B}$$

On précisera la partie réelle et la partie imaginaire de Z

$$Z = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_B} = \frac{-5-2i-(4-i)}{2+17i-(4-i)} = \frac{-5-2i+4+i}{2+17i-4+i} = \frac{-9-i}{-2+18i} \times \frac{-2-18i}{-2-18i} = \frac{(-9-i)(-2-18i)}{(-2)^2-(18i)^2} = \frac{18+162i+2i-18}{4+324} = \frac{164}{328}i = \frac{1}{2}i$$

La partie réelle de Z vaut 0 et sa partie imaginaire $\frac{1}{2}$.

(b) Déterminer le module de Z. Que représente le module de Z ?

$$|Z| = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2} \times |i| = \frac{1}{2}$$

De plus :

$$|Z| = \left|\frac{z_A - z_B}{z_D - z_B}\right| = \frac{|z_A - z_B|}{|z_D - z_B|} = \frac{BA}{BD}$$

Le module de Z représente le rapport BA/BD.

(c) Déterminer un argument de Z. Que représente l'argument de Z ?

Notons $\theta = arg(Z) = arg\left(\frac{1}{2}i\right)$. Puisque Z est un imaginaire pur alors $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

De plus

$$arg(Z) = arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_D - z_B}\right) = arg(z_A - z_B) - arg(z_D - z_B) = (\vec{u};\overrightarrow{BA}) - (\vec{u};\overrightarrow{BD}) = (\vec{u};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BD};\vec{u}) = (\overrightarrow{BD};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})$$

Autrement dit l'argument de Z est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})$.

(d) Que peut-on déduire de la question précédente quant à la nature du triangle ABD.

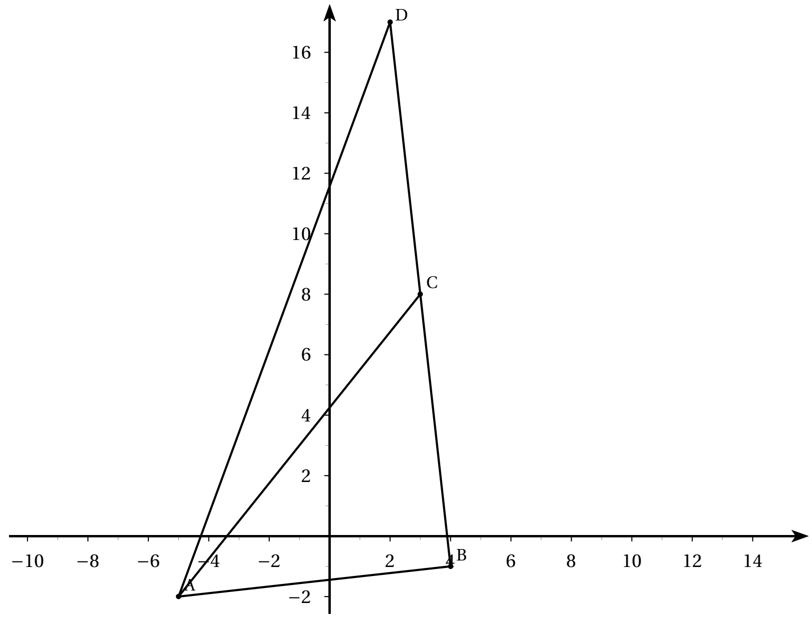
Nous venons de démontrer dans la question précédente que $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$, par conséquent le triangle ABD est rectangle en B.

Remarquons que dans la question 2)b nous avons démontré que :

$$\frac{BA}{BD} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2BA = BD$$

Le côté [BD] est donc deux fois plus grand que le côté [BA].

Confirmons ces informations sur en observant la figure :


D
C
B
A
16
14
12
10
8
6
4
2
−2
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°10 **SUJET B**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **(10 points)**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -4+i \quad ; \quad z_B = 4-i \quad ; \quad z_C = 6+7i \quad \text{et} \quad z_D = 8+15i$$

1. (a) Calculer AB, AC et BC.

$$AB = |z_B - z_A| = |4-i-(-4+i)| = |4-i+4-i| = |8-2i| = \sqrt{8^2+(-2)^2} = \sqrt{68}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |6+7i-(-4+i)| = |6+7i+4-i| = |10+6i| = \sqrt{10^2+6^2} = \sqrt{100+36} = \sqrt{136}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |6+7i-(4-i)| = |6+7i-4+i| = |2+8i| = \sqrt{2^2+8^2} = \sqrt{68}$$

(b) En déduire la nature du triangle ABC. AB = BC par conséquent le triangle ABC est isocèle en B.
De plus $AC^2 = 136$ et $AB^2 + BC^2 = 68+68 = 136$ donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B.
En somme le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

2. (a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe Z :

$$Z = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_B}$$

On précisera la partie réelle et la partie imaginaire de Z

$$Z = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_B} = \frac{-4+i-(4-i)}{8+15i-(4-i)} = \frac{-4+i-4+i}{8+15i-4+i} = \frac{-8+2i}{4+16i} = \frac{-4+i}{2+8i} \times \frac{2-8i}{2-8i} = \frac{(-4+i)(2-8i)}{2^2-(8i)^2} = \frac{36i}{4+64} = \frac{34}{68}i = \frac{1}{2}i$$

La partie réelle de Z vaut 0 et sa partie imaginaire $\frac{1}{2}$.

(b) Déterminer le module de Z. Que représente le module de Z ?

$$|Z| = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2} \times |i| = \frac{1}{2}$$

De plus :

$$|Z| = \left|\frac{z_A - z_B}{z_D - z_B}\right| = \frac{|z_A - z_B|}{|z_D - z_B|} = \frac{BA}{BD}$$

Le module de Z représente le rapport BA/BD.

(c) Déterminer un argument de Z. Que représente l'argument de Z ?
Notons $\theta = arg(Z) = arg\left(\frac{1}{2}i\right)$. Puisque Z est un imaginaire pur alors $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
De plus

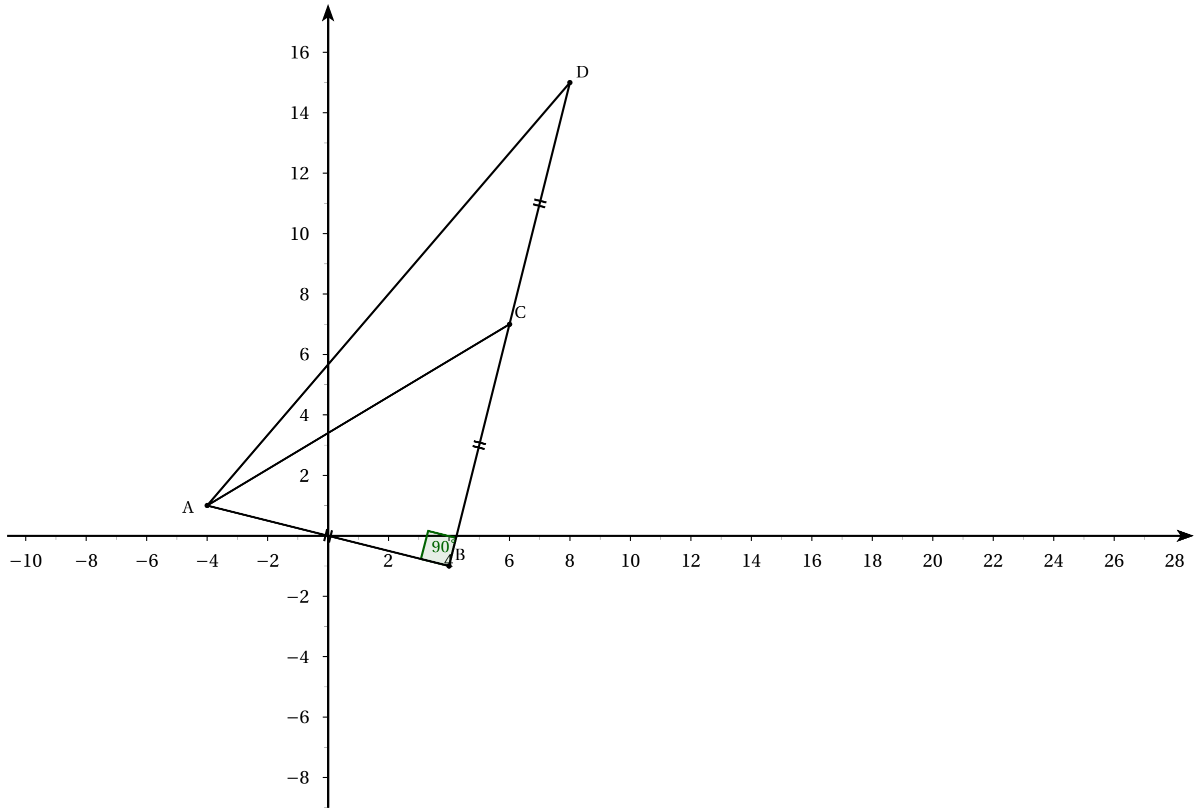
$$arg(Z) = arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_D - z_B}\right) = arg(z_A - z_B) - arg(z_D - z_B) = (\vec{u};\overrightarrow{BA}) - (\vec{u};\overrightarrow{BD}) = (\vec{u};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BD};\vec{u}) = (\overrightarrow{BD};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})$$

Autrement dit l'argument de Z est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})$.

(d) Que peut-on déduire de la question précédente quant à la nature du triangle ABD.
Nous venons de démontrer dans la question précédente que $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$, par conséquent le triangle ABD est rectangle en B.
Remarquons que dans la question 2)b nous avons démontré que :

$$\frac{BA}{BD} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2BA = BD$$

Le côté [BD] est donc deux fois plus grand que le côté [BA].
Confirmons ces informations sur en observant la figure :



D
C
A
B
90°