∽ Correction du devoir maison 2 ∽
Suites monotones et limites

Vous traiterez au choix au moins un exercice parmi les 4 suivants. En traiter au moins deux est conseillé. Si vous ne vous sentez pas encore à l'aise avec les suites, il est inutile de tourner la page.

Exercice 1. Théorème de convergence monotone. ♠♠

Soit (u_n) une suite décroissante et strictement positive.
Soit la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{1+u_n}$

1. Démontrer que la suite (v_n) est croissante. Puisque u_n est décroissante on a pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$ et donc :
   $1 + u_{n+1} \geq 1 + u_n$, du fait que $u_n > 0$ il suit que $u_n + 1 \neq 0$, on peut donc inverser et on obtient :
   $$\frac{1}{1+u_{n+1}} \leq \frac{1}{1+u_n} \iff v_{n+1} \leq v_n$$
   Nous venons de démontrer que (v_n) est une suite croissante.
2. En vous aidant du fait que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n, démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n < 1$$
   Puisque $u_n > 0$ pour tout entier naturel n il suit que $u_n + 1 > 1$ et par passage à l'inverse on obtient :
   $$\frac{1}{1+u_n} < 1 \iff v_n < 1$$
3. En déduire que la suite (v_n) converge.
   Nous avons démontré que la suite (v_n) est croissante et majorée par 1, elle converge donc vers un réel inférieur ou égal à 1.

Exercice 2. Théorème de convergence monotone. ♠♠♠

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = \dfrac{3u_0}{1+2u_0} = \dfrac{1,5}{2} = 0,75$, donc $u_2 = \dfrac{3u_2}{1+2u_2} = \dfrac{2,25}{2,5} = 2,25 \times 5dir = 11,25/2 = 5,5 + 0,125 = 5,625$

   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.
   Notons $\mathscr{P}(n) : 0 < u_n$
   Initialisation : pou $n = 0$ on sait que $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$
   $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang 0.
   Hérédité : Montrons que si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$
   Si $u_n > 0$ alors $3u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 1$ donc par quotient $\dfrac{3u_n}{1+2u_n} > 0$ ainsi $u_{n+1} > 0$
   $\mathscr{P}$ est héréditaire.
   Conclusion : $\mathscr{P}$ est initialisée et héréditaire donc $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

   (c) i. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
   Calculer $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc f' est de la forme $\dfrac{u'v_u v'}{v^2}$
   Ainsi pour $x \geq 0$ on a :
   $$f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3+6x-6x}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2} > 0$$
   donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

D. Zancanaro
zancanaro.math@gmail.com

ii. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a $u_n < 1$

Notons $\mathscr{P}(n) : u_n < 1$

Initialisation : pou $n = 0$ on sait que $u_0 = \dfrac{1}{2} < 1$

$\mathscr{P}$ est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Montrons que si $u_n < 1$ alors $u_{n+1} < 1$

Si $u_n < 1$ alors $f(u_n) < f(1)$ puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

par conséquent $u_{n+1} < \dfrac{3}{1+2} = 1$

$\mathscr{P}$ est héréditaire.

Conclusion : $\mathscr{P}$ est initialisée et héréditaire donc $u_n < 1$ pour tout entier naturel n.

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$$

Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2un} = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$$

(b) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ puis en déduire que la suite (u_n) est croissante.

Du fait que $u_n < 1$ il suit que $1 - u_n > 0$, du fait que $u_n > 0$ on déduit que $2u_n(1-u_n) > 0$.

De même comme $u_n > 0$ on a $1 + 2u_n > 0$ et donc au final par quotient $\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$

Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

(c) En déduire que la suite (u_n) converge.

D'après la question précédente (u_n) est croissante, de plus on sait aussi qu'elle est majorée par 1 donc elle converge.

Exercice 3. Divergence de la série harmonique ♠♠♠♠♠♠

On considère la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

$$u_1 = 1 \quad u_2 = \frac{3}{2} \quad u_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \quad u_4 = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

(b) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche u_n :

Algorithme 1 :

Données: u est un nombre réel.
n est un entier naturel non nul.
k est un entier naturel non nul.
$k = 1$ et $u = 1$.
Saisir n
Tant que $(k < n)$ **Faire**
  $k := k + 1$ $u := u + \frac{1}{k}$
Fin Tant que
Afficher u

(c) Qu'affiche l'algorithme pour $n = 10$?, $n = 100$? et $n = 1000$? (on ne demande pas de détail).

Il affiche pour $n = 10$: $\frac{7381}{2520}$
pour $n = 100$: $\simeq 5,18$
pour $n = 1000$: $\simeq 7,48$

(d) Pensez-vous que la suite (u_n) converge ?

Difficile à dire mais il semble plutôt que non.

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$ donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

(b) En écrivant $u_n = \underbrace{\frac{1}{1}}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}}_{\geq 1} + \cdots + \frac{1}{n}$ justifier que (u_n) n'est pas majorée c'est-à-dire justifier que quelque soit le réel A il existe un rang n tel que $u_n > \mathrm{A}$.

Remarquons d'abord que $u_{15} \geq 4 \Longrightarrow u_{16} \geq 4 \Longleftrightarrow u_{2^4} \geq 4$. De même $\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{31} \geq \frac{1}{16} \times 16 = 1$, par conséquent $u_{31} \geq 5 \Longrightarrow u_{32} \geq 5 \Longrightarrow u_{2^5} \geq 5$

De manière générale on a $u_{2^n} \geq n$ (propriété que nous démontrerons par récurrence à la fin du devoir).

Ainsi soit A un nombre réel, alors notons M le plus petit nombre entier supérieur ou égal à A, il suit que $u_{2^\mathrm{M}} \geq \mathrm{M} \geq \mathrm{A}$.

Par conséquent quelque soit le réel A, il existe un rang n tel que $u_n > \mathrm{A}$.

(c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

u_n est une suite croissante non majorée donc elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 4. ♠♠♠♠

On considère la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2$.

Pour $k \geq 2$:

$k-1<k$ donc $k(k-1)<k^2$ donc $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$
De plus $\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{k-(k-1)}{k(k-1)}=\frac{1}{k(k-1)}$
Ainsi on a :

$$\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}, \forall k\geq 2$$

2. Montrer que

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n}$$

3. Montrer que

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1$$

.

Comme

$$\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

il suit que

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\Longleftrightarrow\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1-\frac{1}{n}\leq 1$$

4. Déterminer un réel M qui majore u_n pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1+1=2$$

5. Montrer que u converge.
(u_n) est majorée par 2, de plus elle est trivialement croissante donc elle converge.