BAC ROUGE

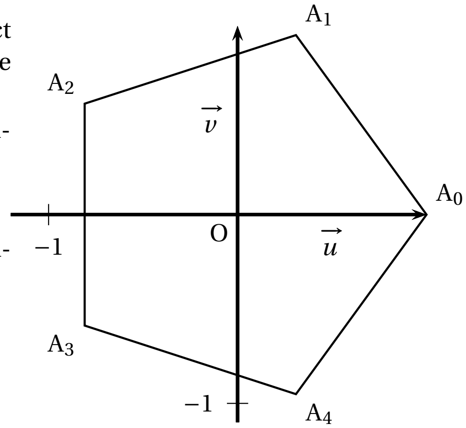
Exercice 1. **3 points**

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $\left(\overrightarrow{OA_k} ; \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$.



1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\dfrac{i}{2}$.

   Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment [BJ] en un point K.

   Calculer BJ, puis en déduire BK.

2. (a) Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

   (b) Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

   (c) Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

► Calcul formel	
1	cos (4*pi/5) $\rightarrow \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2) $\rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt »signifie « racine carrée »

   En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3. Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

Exercice 2. **5 points**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5\,;\,-5\,;\,2), B(-1\,;\,1\,;\,0), C(0\,;\,1\,;\,2) \quad \text{et } D(6\,;\,6\,;\,-1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).
5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.
6. On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.

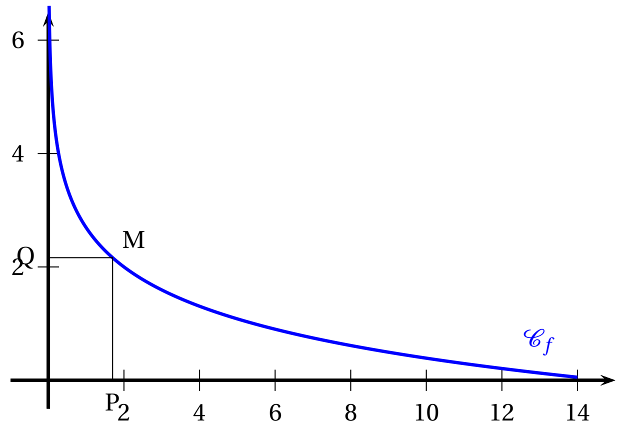
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 3. **3 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

Exercice 4. **4 points**

Le test de dépistage d'une maladie possède les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99 ;

— la probabilité qu'un individu sain ait un test négatif est 0,99.

On note p la proportion de malade dans la population puis on note :

— T l'événement : « le test est positif »

— M l'événement : « l'individu est malade »

On croise au hasard un individu ayant effectué le dépistage.

1. Modéliser la situation par un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
3. (a) Exprimer en fonction de p la probabilité qu'un individu, dont le test est positif, soit malade.
   (b) Quelle doit être la proportion p de malades pour que la probabilité précédente (i.e. la probabilité qu'un individu, dont le test est positif, soit malade) soit supérieure à 0,90 ?
4. (a) Déterminer, en fonction de p, la probabilité qu'un individu, dont le test est négatif, soit malade.
   (b) Quelle doit être la proportion p de malades pour que la probabilité précédente soit inférieure à 0,1 ?
5. Le test de dépistage d'une maladie est acceptable si et seulement si la probabilité qu'un individu, dont le test est positif, soit malade est supérieure à 0,90 et la probabilité qu'un individu, dont le test est négatif, soit malade est inférieure à 0,1. Dans ce cas pour quelle proportion p de malades le test est-il acceptable ?

Exercice 5. **5 points**

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25\,°C$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100\,°C$.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A. **Modélisation discrète**

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

PARTIE B. **Modélisation continue**

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

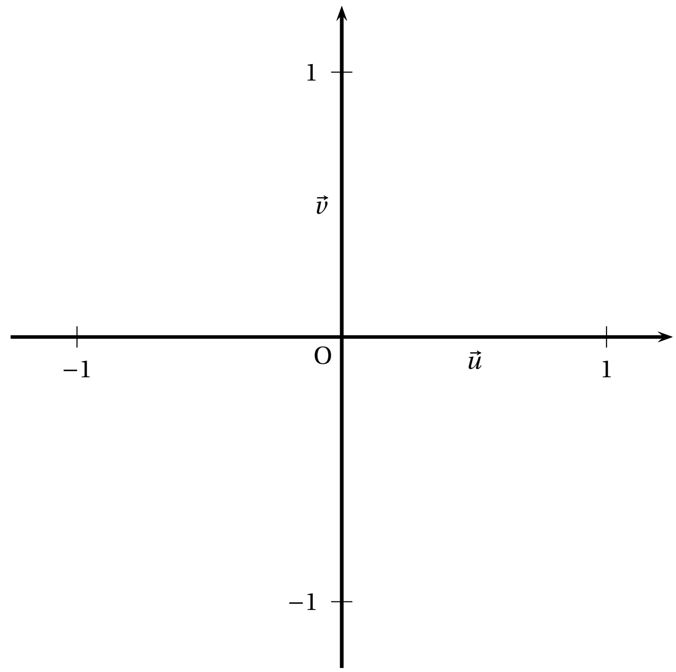
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. (a) Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.
2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
   On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
   On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.
   (a) Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe , que l'on a $\mathscr{A}(25) > 80$.
   (b) Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $\mathscr{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\displaystyle\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.
   (c) La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

Nom : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

Annexe (complexe) : Construction du pentagone régulier à la règle non graduée et au compas



Annexe (fonctions) : Une aire.