BACCALAUREAT GENERAL BLANC

SESSION 2016

MATHEMATIQUES-NON SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7**.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC BLANC

Exercice 1. **5 points**

PARTIE A. **questionnaire à choix multiples**

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

   La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

   a. 6 **b.** 7 **c.** 10 **d.** 12

2. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

   Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

   La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

   a. $\dfrac{125}{3\,888}$ **b.** $\dfrac{625}{648}$ **c.** $\dfrac{25}{7\,776}$ **d.** $\dfrac{3}{5}$

3. Soient A et B deux évènements indépendants d'une même univers Ω tels que $p(\mathrm{A}) = 0{,}3$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}65$. La probabilité de l'évènement B est :

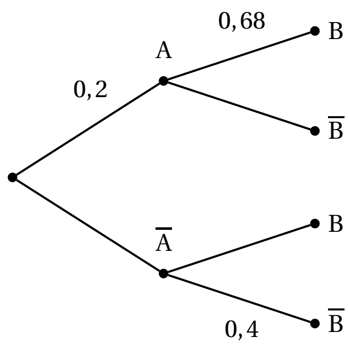
   a. 0,5 **b.** 0,35 **c.** 0,46 **d.** 0,7

PARTIE B. **Vraie ou Faux ?**

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'arbre de probabilités suivant :



   Affirmation : la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à 0,32.

2. On considère une urne contenant n boules rouges et trois boules noires, où n désigne un entier naturel non nul. Les boules sont indiscernables au toucher.

   On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.

   Affirmation : il existe une valeur de n telle que la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{9}{22}$.

Exercice 2. **5 points**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g et dresser le tableau de variation complet de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.

   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **Étude de la fonction f**
   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   (b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel
   $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

   (e) Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

Exercice 3. **5 points**

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

   $$z^2 + z + 1 = 0.$$

   (b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme trigonométrique.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   (a) $\mathrm{j}^3 = 1$;
   (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 4. **5 points**

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

PARTIE A.

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).

A	B	C
n	Population en zone rurale	Population en ville
0	90	30
1	82,5	37,5
2	76,125	43,875
3	70,706	49,294
4	66,100	53,900
5	62,185	57.815
6	58,857	61,143
7	56,029	63,971
8	53,625	66,375
9	51,581	68,419
10	49,844	70,156
11	48,367	71,633
…	…	…
59	40,003	79,997
60	40,003	79,997
61	40,002	79,998

Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

PARTIE B.

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. (a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

(b) On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.
   (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   (b) En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.
4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   (a) Que fait cet algorithme ?
   (b) Quelle valeur affiche-t-il ?

Fin