∽ Devoir Maison 4 ∾
Suites/Espace/fonctions

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. ♠♠

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points :

$$A(2;1;-1),\quad B(-1;2;4),\quad C(0;-2;3),\quad D(1;1;-2)$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire, en justifiant, si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. **Affirmation 1** : Les points A, B et C définissent un plan.
2. **Affirmation 2** : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :
$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2+3k \\ z = 3-4k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$
3. **Affirmation 3** : Une représentation paramétrique du plan (ABD) est :
$$\begin{cases} x = 1+3t-t' \\ y = 1-t \\ z = -2-5t-t' \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$
4. **Affirmation 4** : La droite Δ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1+2u \\ y = -1+3u \\ z = 1-4u \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}$$
est sécante avec la droite (AC).

Exercice 2. ♠♠

PARTIE A. **Etude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = x^3 + 12x + 4$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner α à 10^{-2} près ou proposer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Dresser le tableau de signe de la fonction g.

PARTIE B. **Etude d'une fonction rationnelle**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+4}$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+4)^2}$$
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 3. ♠♠♠

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{3x+4}$$

   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variation complet de f.
   (c) Justifier que la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$.

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0=0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1}=f(u_n)=\sqrt{3u_n+4}$$

   (a) Montrer, par récurrence et en utilisant la fonction f, que (u_n) est strictement croissante.
   (b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\quad u_n\leq 4$
   (c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données:
u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
ϵ est un nombre réel strictement positif.
$n=0$.
$u=0$.
Tant que $(|u-4|\geq\epsilon)$ **Faire**
  $n:=n+1$.
  $u:=\sqrt{3\times u+4}$
Fin Tant que
Afficher n

   (a) Afin de découvrir l'affichage de cet algorithme pour $\epsilon=0,1$. Recopier et compléter le tableau des valeurs prises par les variables n, u et par $|u-4|$ (*On se contentera de valeurs approchées*) :

n	0	1	…	…	…	…
u	0	…	…	…	…	…
$\lvert u-4\rvert$	4	…	…	…	…	…

   Qu'affiche cet algorithme ?

   (b) Pourquoi est-on sûr qu'à partir d'un certain rang on aura $|u-4|<\epsilon$?

4. (a) On souhaite montrer que pour tout entier naturel n on a : $\qquad 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(4-u_n)$

      i. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$4-u_{n+1}=\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}}$$

      ii. En justifiant que $\sqrt{3u_n+4}\geq 2$ montrer que pour tout entier naturel n on a $\dfrac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}\leq\dfrac{1}{2}$.

      iii. Conclure.

   (b) En déduire que : $\qquad 4-u_{10}\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^5(4-u_5)$

   (c) En déduire que pour $\epsilon=0,01$, l'algorithme affichera une valeur de n inférieure ou égale à 10.