∽ DEVOIR MAISON 2 ∾
SUITES MONOTONES ET LIMITES

Vous traiterez au choix au moins un exercice parmi les 4 suivants. En traiter au moins deux est conseillé. Si vous ne vous sentez pas encore à l'aise avec les suites, il est inutile de tourner la page.

Exercice 1. Théorème de convergence monotone. ♠♠

Soit (u_n) une suite décroissante et strictement positive.

Soit la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{1+u_n}$

1. Démontrer, par récurrence que la suite (v_n) est strictement croissante.
2. En vous du fait que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n < 1$$
3. En déduire que la suite (v_n) converge.

Exercice 2. Théorème de convergence monotone. ♠♠♠

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.
   (c) i. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
   Calculer $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.
   ii. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a $u_n < 1$
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$$
   (b) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ puis en déduire que la suite (u_n) est croissante.
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 3. Divergence de la série harmonique ♠♠♠♠♠♠

On considère la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

   (b) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche u_n :

   Algorithme 1 :

   Données: u est un nombre réel.
   n est un entier naturel non nul.
   k est un entier naturel non nul.
   $k = 1$ et $u = 1$.
   Saisir n
   Tant que $(k < n)$ **Faire**
   $k :=$ ……… $u :=$ ………
   Fin Tant que
   Afficher ……

   (c) Qu'affiche l'algorithme pour $n = 10$?, $n = 100$? et $n = 1000$? (on ne demande pas de détail).

   (d) Pensez-vous que la suite (u_n) converge ?

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

   (b) En écrivant $u_n = \underbrace{\frac{1}{1}}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq 1} + \cdots + \frac{1}{n}$ justifier que (u_n) n'est pas majorée c'est-à-dire justifier que quelque soit le réel A il existe un rang n tel que $u_n > \mathrm{A}$.

   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 4. ♠♠♠♠

On considère la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2$.
2. Montrer que
$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$
3. Montrer que
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$$
.
4. Déterminer un réel M qui majore u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que u converge.