DERIVEE DU QUOTIENT[2]

Problème : Coût, recette, bénéfice et coût moyen.

D.Zancanaro

Mai 2020

" La veritable éducation consiste à pousser les gens à penser par eux-mêmes. " [1]

1 La problématique

1.1 Coùt, recette et bénéficie

Enoncé : Observons le problème suivant pour mieux comprendre :

Une entreprise fabrique un produit chimique dont le coût journalier de production pour x litres est donné par la fonction C définie sur $I = [0; 50]$ par :

$$C(x) = 0.5x^2 + 2x + 200$$

les coûts étant exprimés en centaine d'euros.

Le prix de vente d'un litre de ce produit chimique est de 2300 euros.

Combien produire pour obtenir un bénéfice maximal ?

Cette dernière information montre que la recette pour x litres de produit chimique vendus la recette est de 23 centaines d'euros fois x autrement dit :

$$R(x) = 23x$$

Ainsi on obtient immédiatement le bénéfice de cette entreprise qui vaut :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 23x - (0.5x^2 + 2x + 200) = 23x - 0.5x^2 - 2x - 200 = -0.5x^2 + 21x - 200$$

Une fois le bénéfice connue, il est naturel de s'intéresser à maximiser son bénéfice, pour cela on a recours à la dérivée :

$$B'(x) = -x + 21$$

qui s'annule lorsque $x = 21$ d'où le tableau suivant :

x	0		21		50
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-200	$\nearrow$	20.5	$\searrow$	-400

Le bénéfice est maximal pour une production de 21 litres.

Figure 1: on est fin prêt à gagner beaucoup d'argent !

1.2 Coût moyen

Le coût moyen de production d'un litre lorsqu'on en produit x est donnée par la fonction C_M définie :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0.5x^2 + 2x + 200}{x}$$

On s'intéresse naturellement à la quantité à produire pour rendre minimal le coût moyen par litres.

Pour cela on souhaite donc dérivée la fonction C_M comme on l'a fait précédemment pour la fonction bénéfice.

On pourrait penser que la dérivée vaut :

$$C'_M(x) = \frac{C'(x)}{(x)'}$$

Malheureusement c'est faux, cette formule ne marche pas.

Pour s'en convaincre observons la fonction suivante : $f(x) = x(x+1)$

On pourrait croire que $f'(x) = 1 \times (1+0) = 1$ mais on peut aussi écrire que $f(x) = x^2 + x$ et donc $f'(x) = 2x + 1$.

Autrement dit si f s'exprime comme un produit de deux fonctions la dérivée de f n'est pas le produit des dérivées.

Il en va de même pour le **quotient**.

Si f s'exprimer comme le quotient de deux fonctions alors la dérivée de f n'est pas le quotient des dérivées.

2 Dérivée du quotient

Théorème 1. *u et v représente deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $f = \frac{u}{v}$.*

Si f est dérivable sur I alors $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple :

1. Si $f(x) = \frac{1}{x}$.

   Il s'agit d'un quotient avec $u = 1$ et $v = x$, on obtient $u' = 0$ et $v' = 1$ et donc :

$$f'(x) = \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

2. Si $f(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{4x+2}{3-2x}$.

   Il s'agit d'un quotient avec $u = 4x + 2$ et $v = 3 - 2x$, on obtient $u' = 4$ et $v' = -2$ et donc :

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{4 \times (3-2x) - (4x+2) \times (-2)}{(3-2x)^2} = -\frac{12 - 8x + 8x + 4}{(3-2x)^2} = \frac{16}{(3-2x)^2}$$

2.1 Application : Coût Moyen

On peut désormais dérivée notre fonction coût moyen que nous rappelons ici :

$$C_M(x) = \frac{0.5x^2 + 2x + 200}{x}$$

Il s'agit d'une expression de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = 0.5x^2 + 2x + 200$ et $v = x$, on a $u' = x + 2$ et $v' = 1$ d'où :

$$C'_M(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x+2)(x) - (0.5x^2 + 2x + 200) \times 1}{x^2} = \frac{x^2 + 2x - 0.5x^2 - 2x - 200}{x^2} = \frac{0.5x^2 - 200}{x^2}$$

Le signe de cette dérivée est le même que celui de $0.5x^2 - 200$ car diviser par un nombre positif ne change pas le signe d'un nombre et ici on divise par un carré donc pas un nombre positif.

Le signe du trinôme $0.5x^2 - 200$ s'obtient en cherchant les racines du trinôme :

$$\Delta = b^2 - 4ac)0 - 4 \times 0.5 \times (-200) = 400$$

Il existe donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\delta}}{2a} = \frac{-20}{1} = -20 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\delta}}{2a} = \frac{20}{1} = 20$$

x	0		20		50
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	$\searrow$		22	$\nearrow$	31

Le coût moyen est minimum pour une production de 20 litres.

Fin

"Silence la marmaille ! Vous êtes tombés sur la crête ? (ou quoi ?)" [2]

References

[1] Noam Chomsky. *Raison liberté. Sur la nature humaine, l'éducation le rôle des intellectuels.* Agone, 2010.

[2] Christian Jolibois. *Les P'tites Poules et la Grande Casserole.* Pocket Jeunesse, 2012.