

# DERIVEE DU QUOTIENT<sup>2</sup>

## Problème : Coût, recette, bénéfice et coût moyen.

D.Zancanaro

Mai 2020

” La véritable éducation consiste à pousser les gens à penser par eux-mêmes. ” [1]

## 1 La problématique

### 1.1 Coût, recette et bénéfice

**Énoncé** : Observons le problème suivant pour mieux comprendre :

Une entreprise fabrique un produit chimique dont le coût journalier de production pour  $x$  litres est donné par la fonction  $C$  définie sur  $I = [0; 50]$  par :

$$C(x) = 0.5x^2 + 2x + 200$$

les coûts étant exprimés en centaine d'euros.

Le prix de vente d'un litre de ce produit chimique est de 2300 euros.

**Combien produire pour obtenir un bénéfice maximal ?**

Cette dernière information montre que la recette pour  $x$  litres de produit chimique vendus la recette est de 23 centaines d'euros fois  $x$  autrement dit :

$$R(x) = 23x$$

Ainsi on obtient immédiatement le bénéfice de cette entreprise qui vaut :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 23x - (0.5x^2 + 2x + 200) = 23x - 0.5x^2 - 2x - 200 = -0.5x^2 + 21x - 200$$

Une fois le bénéfice connue, il est naturel de s'intéresser à maximiser son bénéfice, pour cela on a recours à la dérivée :

$$B'(x) = -x + 21$$

qui s'annule lorsque  $x = 21$  d'où le tableau suivant :

$x$	0	21	50	
$B'(x)$		+	0	-
$B(x)$	-200	20.5	-400	

Le bénéfice est maximal pour une production de 21 litres.



Figure 1: on est fin prêt à gagner beaucoup d'argent !

## 1.2 Coût moyen

Le coût moyen de production d'un litre lorsqu'on en produit  $x$  est donnée par la fonction  $C_M$  définie :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0.5x^2 + 2x + 200}{x}$$

On s'intéresse naturellement à la quantité à produire pour rendre minimal le coût moyen par litres. Pour cela on souhaite donc dériver la fonction  $C_M$  comme on l'a fait précédemment pour la fonction bénéfice.

On pourrait penser que la dérivée vaut :

$$C'_M(x) = \frac{C'(x)}{(x)'}$$

Malheureusement c'est faux, cette formule ne marche pas.

Pour s'en convaincre observons la fonction suivante :  $f(x) = x(x + 1)$

On pourrait croire que  $f'(x) = 1 \times (1 + 0) = 1$  mais on peut aussi écrire que  $f(x) = x^2 + x$  et donc  $f'(x) = 2x + 1$ .

Autrement dit si  $f$  s'exprime comme un produit de deux fonctions la dérivée de  $f$  n'est pas le produit des dérivées.

Il en va de même pour le **quotient**.

Si  $f$  s'exprime comme le quotient de deux fonctions alors la dérivée de  $f$  n'est pas le quotient des dérivées.

## 2 Dérivée du quotient

**Théorème 1.**  $u$  et  $v$  représente deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $f = \frac{u}{v}$ .

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple :

1. Si  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Il s'agit d'un quotient avec  $u = 1$  et  $v = x$ , on obtient  $u' = 0$  et  $v' = 1$  et donc :

$$f'(x) = \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

2. Si  $f(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{4x + 2}{3 - 2x}$ .

Il s'agit d'un quotient avec  $u = 4x + 2$  et  $v = 3 - 2x$ , on obtient  $u' = 4$  et  $v' = -2$  et donc :

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{4 \times (3 - 2x) - (4x + 2) \times (-2)}{(3 - 2x)^2} = -\frac{12 - 8x + 8x + 4}{(3 - 2x)^2} = \frac{16}{(3 - 2x)^2}$$

### 2.1 Application : Coût Moyen

On peut désormais dériver notre fonction coût moyen que nous rappelons ici :

$$C_M(x) = \frac{0.5x^2 + 2x + 200}{x}$$

Il s'agit d'une expression de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u = 0.5x^2 + 2x + 200$  et  $v = x$ , on a  $u' = x + 2$  et  $v' = 1$  d'où :

$$C'_M(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x + 2)(x) - (0.5x^2 + 2x + 200) \times 1}{x^2} = \frac{x^2 + 2x - 0.5x^2 - 2x - 200}{x^2} = \frac{0.5x^2 - 200}{x^2}$$

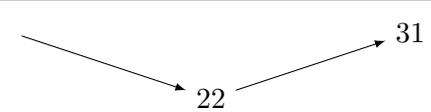
Le signe de cette dérivée est le même que celui de  $0.5x^2 - 200$  car diviser par un nombre positif ne change pas le signe d'un nombre et ici on divise par un carré donc pas un nombre positif.

Le signe du trinôme  $0.5x^2 - 200$  s'obtient en cherchant les racines du trinôme :

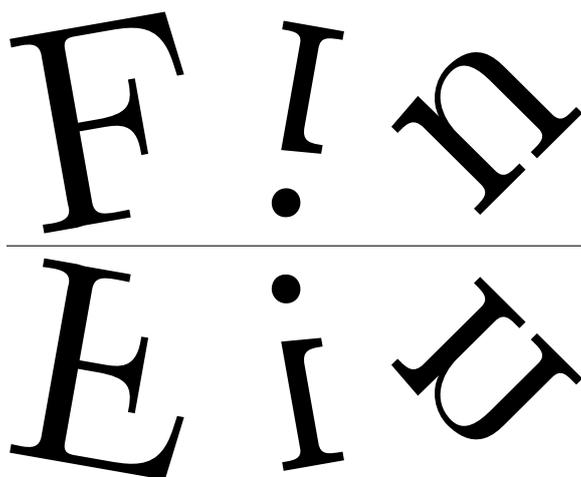
$$\Delta = b^2 - 4ac)0 - 4 \times 0.5 \times (-200) = 400$$

Il existe donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\delta}}{2a} = \frac{-20}{1} = -20 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\delta}}{2a} = \frac{20}{1} = 20$$

$x$	0	20	50	
$C'_M(x)$		-	0	+
$C_M(x)$				31

Le coût moyen est minimum pour une production de 20 litres.



“Silence la marmaille ! Vous êtes tombés sur la crête ? (ou quoi ?)” [2]

## References

- [1] Noam Chomsky. *Raison liberté. Sur la nature humaine, l'éducation le rôle des intellectuels*. Agone, 2010.
- [2] Christian Jolibois. *Les P'tites Poules et la Grande Casserole*. Pocket Jeunesse, 2012.