ೋ DÉRIVÉ DES FONCTIONS QUOTIENT ೋ
DEVOIR MAISON

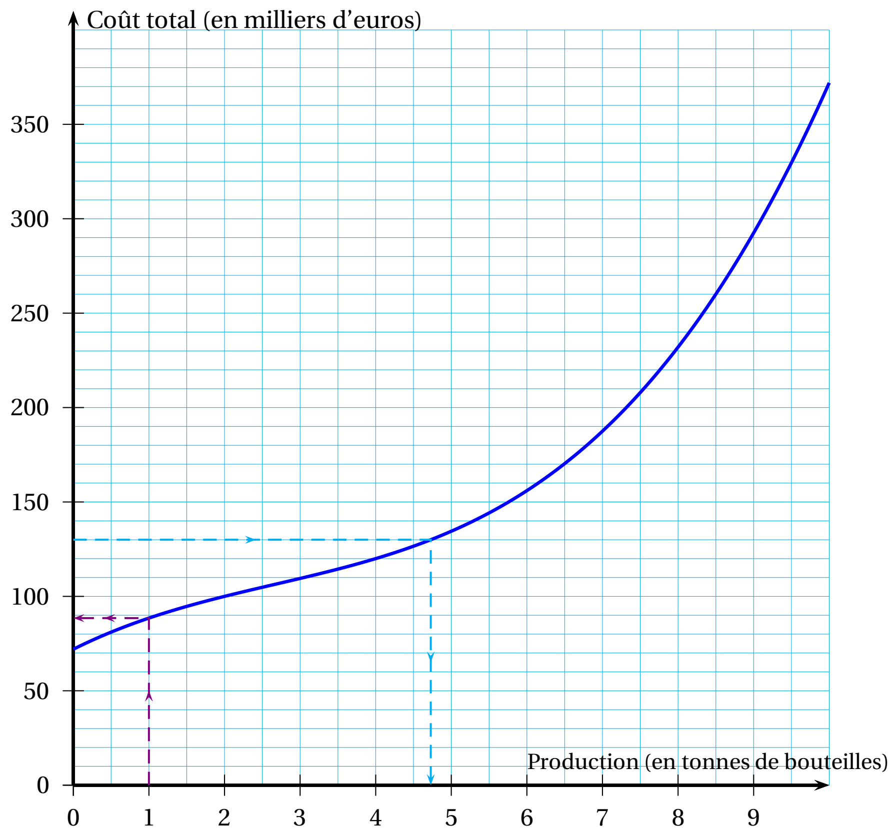
Exercice 1.

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10.

Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ 10]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72.$$

On a représenté ci-dessous la fonction f dans un repère orthogonal du plan.



Partie A

1. Avec la précision permise par le graphique, le coût correspondant à la fabrication d'une tonne de bouteilles est de 90 milliers d'euros. Nous lisons l'ordonnée du point d'abscisse 1 appartenant à la courbe.
2. Avec la précision permise par le graphique, la production de bouteilles correspondant à un coût de fabrication de 130 milliers d'euros est de 4,7 tonnes de bouteilles. Nous lisons l'abscisse du point d'ordonnée 130 appartenant à la courbe.

Partie B

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ par :

$$C_M(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

1. Calculons la dérivée de la fonction C_M, notée C'_M.

   Exprimons d'abord C_M. $C_M(x) = \dfrac{0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72}{x} = 0,5x^2 - 4x + 20 + \dfrac{72}{x}$.

   $C'_M(x) = 0,5(2x) - 4 - \dfrac{72}{x^2} = x - 4 - \dfrac{72}{x^2} = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 72}{x^2}$.

2. Montrons que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ 10]$, $C'_M(x)$ peut s'écrire : $C'_M(x) = \dfrac{(x-6)\left(x^2 + 2x + 12\right)}{x^2}$.

   Pour ce faire, montrons que $x^3 - 4x - 72 = (x-6)(x^2 + 2x + 12)$. Développons $(x-6)(x^2 + 2x + 12)$.

   $(x-6)(x^2 + 2x + 12) = x^3 + 2x^2 + 12x - 6x^2 - 12x - 72 = x^3 - 4x^2 - 72$.

Par conséquent sur l'intervalle $]0\,;\,10]$, $C'_M(x) = \dfrac{(x-6)\left(x^2+2x+12\right)}{x^2}$.

3. $C'_M(x)$ est du signe de $x-6$ pour x variant dans l'intervalle $]0\,;\,10]$ puisque pour tout $x \in]0\,;\,10]$ $x^2+2x+12>0$ comme somme de termes strictement positifs.
   Sur $\mathbb{R}$, $x-6>0$ si et seulement si $x>6$. Il en résulte que sur $]0\,;\,6[$, $C'_M(x)<0$ et sur $]6\,;\,10]$, $C'_M(x)>0$
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
   Pour $x \in]0\,;\,6[$, $C'_M(x)<0$, par conséquent C_M est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur I.
   Pour $x \in]6\,;\,10]$, $C'_M(x)>0$ par conséquent C_M est strictement croissante sur cet intervalle.
   Dressons le tableau de variation de C_M sur $]0\,;\,10]$.

x	0		6		10
$C'_M(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variation de C_M	$+\infty$	↘	26	↗	37.2

4. La production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal est de 6 tonnes.

Partie C

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 milliers d'euros la tonne, par conséquent la recette $R(x)$ est définie par $R(x) = 40x$.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en milliers d'euros. Calculons $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$:
   $B(x) = R(x) - C_M(x) = 40x - (0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72) = -0,5x^3 + 4x^2 + 20x - 72$.
2. Le bénéfice associé à une production de 6,5 tonnes est $B(6,5)$.
   $B(6.5) = -0,5 \times (6.5)^3 + 4 \times (6.5)^2 + 20 \times 6.5 - 72 = 89.6875$.
3. L'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » est fausse car le bénéfice réalisé lorsque le coût est minimal est $B(6) = 84$. Il est donc inférieur à celui réalisé pour une fabrication de 6.5 tonnes.