

CORRECTION LOI NORMALE ET PROBABILITÉ

DEVOIR MAISON

Exercice 1.

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On s'intéresse au nombre de dons de sang lors de collectes organisées au sein de l'Établissement Français du Sang (EFS) depuis 2010.

Année	2010	2011	2012	2013	2014
Nombre de dons de sang (en milliers)	2 473	2 586	2 612	2 589	2 547

Source : site de l'EFS

1. Déterminons à 0,01 % près, le pourcentage d'augmentation de dons de sang entre 2010 et 2014.

Le taux d'évolution \mathcal{T} est défini par $\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

$$\mathcal{T} = \frac{2547 - 2473}{2473} \approx 0.02992.$$

Le pourcentage d'augmentation de dons de sang entre 2010 et 2014, arrondi à 0,01 % près est 2.99 %.

2. Montrons que l'augmentation annuelle moyenne entre 2010 et 2014 est de 0,74 % arrondie à 0,01 %.

En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1 + t_m)^4$ puisque le nombre de dons du sang a subi 4 évolutions durant cette période.

$$(1 + t_m)^4 = \frac{2547}{2473} \approx 1.02992 \text{ par conséquent } t_m = 1.02992^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0.0073983.$$

Le taux annuel moyen d'évolution du nombre de dons du sang entre 2010 et 2014, arrondi à 0,01 %, est bien égal à 0.74 %.

3. En supposant que l'augmentation du nombre de dons suivra la même évolution, calculons le nombre de dons de sang que l'EFS peut espérer collecter en 2017.

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 0,0074 est 1,0074. Entre 2014 et 2017, il y a eu 3 évolutions. $2547 \times 1,0074^3 \approx 2603.9629$.

Le nombre de dons de sang que l'EFS peut espérer collecter en 2017, arrondi au millier, est 2604000.

Partie B

Dans une région, 75 % des donneurs sont des hommes.

Parmi eux, 25 % ont moins de 40 ans.

Parmi les femmes donnant leur sang, 50 % ont moins de 40 ans.

On interroge au hasard un donneur de sang dans cette région et on considère les événements suivants :

- H : « la personne interrogée est un homme »
- Q : « la personne interrogée a moins de 40 ans ».

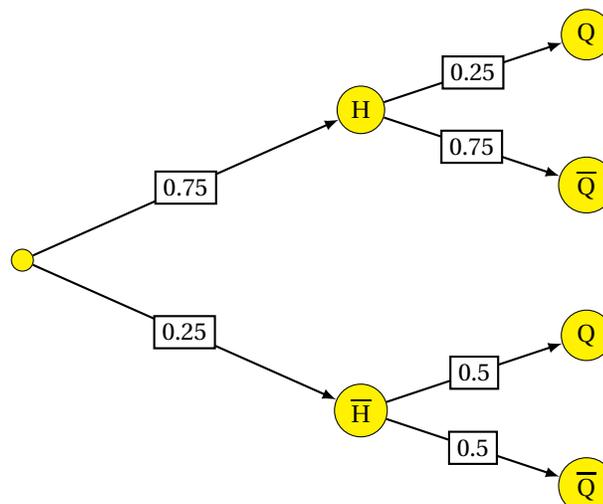
\bar{H} désigne l'événement contraire de H et $P_H(Q)$ la probabilité de Q sachant H.

1. À l'aide de l'énoncé,

$P(H) = 0.75$ car 75 % des donneurs sont des hommes

$P_H(Q) = 0.25$ car parmi eux, 25 % ont moins de 40 ans.

2. L'arbre pondéré est donc le suivant :



3. Calculons $P(H \cap Q)$.

$$P(H \cap Q) = p(H) \times P_H(Q) = 0.75 \times 0.25 = \frac{3}{16}$$

La probabilité que la personne interrogée soit un homme de moins de quarante ans est $\frac{3}{16}$.

4. Démontrons que la probabilité que la personne interrogée ait moins de 40 ans est 0,3125.

$$P(Q) = P(H \cap Q) + P(\overline{H} \cap Q) = p(H) \times P_H(Q) + p(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(Q) = \frac{3}{16} + 0.25 \times 0.5 = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

5. La personne interrogée a plus de 40 ans. La probabilité que ce soit un homme est notée $P_{\overline{Q}}(H)$.

$$P_{\overline{Q}}(H) = \frac{P(H \cap \overline{Q})}{P(\overline{Q})} = \frac{0.75 \times 0.75}{1 - 0.3125} = \frac{9}{11} \approx 0.818181818181818.$$

La probabilité, arrondie à 10^{-4} que la personne interrogée soit un homme sachant qu'elle a plus de quarante ans est $\frac{9}{11}$.

Partie C

L'EFS affirme que dans une région donnée : « 23 % de la population donne son sang au moins une fois par an ».

On interroge au hasard un échantillon de 1000 personnes habitant cette région. Parmi elles, 254 ont donné au moins une fois leur sang au cours de la dernière année.

L'EFS fait l'hypothèse qu'une proportion de 0,23 de la population donne son sang au moins une fois par an ».

Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 de la fréquence de personnes donnant leur sang pour un échantillon de taille 1000.

$$\left[0.23 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, 0.23 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] \approx [0.1984 ; 0.2616]$$

Parmi elles, 254 ont donné au moins une fois leur sang au cours de la dernière année.

La fréquence constatée de 0,240 appartient à l'intervalle de fluctuation donc on peut considérer que l'hypothèse selon laquelle il y a 23 % de personnes donnant leur sang ne permet pas mettre en doute l'affirmation de l'EFS.