Loi normale et fonctions
Devoir Maison

Exercice 1.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Pour la fabrication de machines agricoles, une usine reçoit en grande quantité des plaques métalliques carrées. Elles ne peuvent être utilisées dans le processus de fabrication que si la longueur de leurs côtés et leur épaisseur respectent certains critères.

1. Un premier test permet de vérifier la longueur des côtés de chaque plaque. Une plaque réussit ce test si la longueur de ses côtés est comprise entre 81,6 centimètres et 82,4 centimètres.

   On note X la variable aléatoire qui, à chaque plaque prélevée au hasard, associe la longueur de son côté, en centimètres.

   On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 82 et d'écart-type 0,2.

   Déterminons la probabilité, arrondie au millième, qu'une plaque réussisse ce premier test.

   $P(81,6 \leqslant X \leqslant 82,4) \approx 0.954$

   remarque $81,4 = \mu - 2\sigma$ et $82,6 = \mu + 2\sigma$

2. Les plaques ayant réussi le premier test subissent un second test permettant de vérifier leur épaisseur. Une plaque sera utilisable par l'usine si son épaisseur est inférieure à 3 millimètres.

   Le fournisseur affirme que 90 % des plaques qui subiront ce second test ont une épaisseur inférieure à 3 millimètres.

   On effectue le second test sur un lot de 2500 plaques.

   (a) Déterminons l'intervalle de fluctuation, à au moins 95 %, de la fréquence des plaques dont l'épaisseur est inférieure à 3 millimètres, dans ce lot.

   $n = 2500 > 30,\ np = 2500 \times 0,9 = 2250 > 5\ n(1-p) = 2500 \times 0,1 = 250 > 5$

   $\left[0.9 - \dfrac{1}{\sqrt{2500}}\ ;\ 0.9 + \dfrac{1}{\sqrt{2500}}\right] \approx [0.88\ ;\ 0.92].$

   L'intervalle de fluctuation,à au moins 95 % est $[0.88\ ;\ 0.92]$

   (b) Parmi les 2 500 plaques, 2 274 ont réussi le second test.

   La fréquence observée est $\dfrac{2274}{2500} \approx 0.9096$.

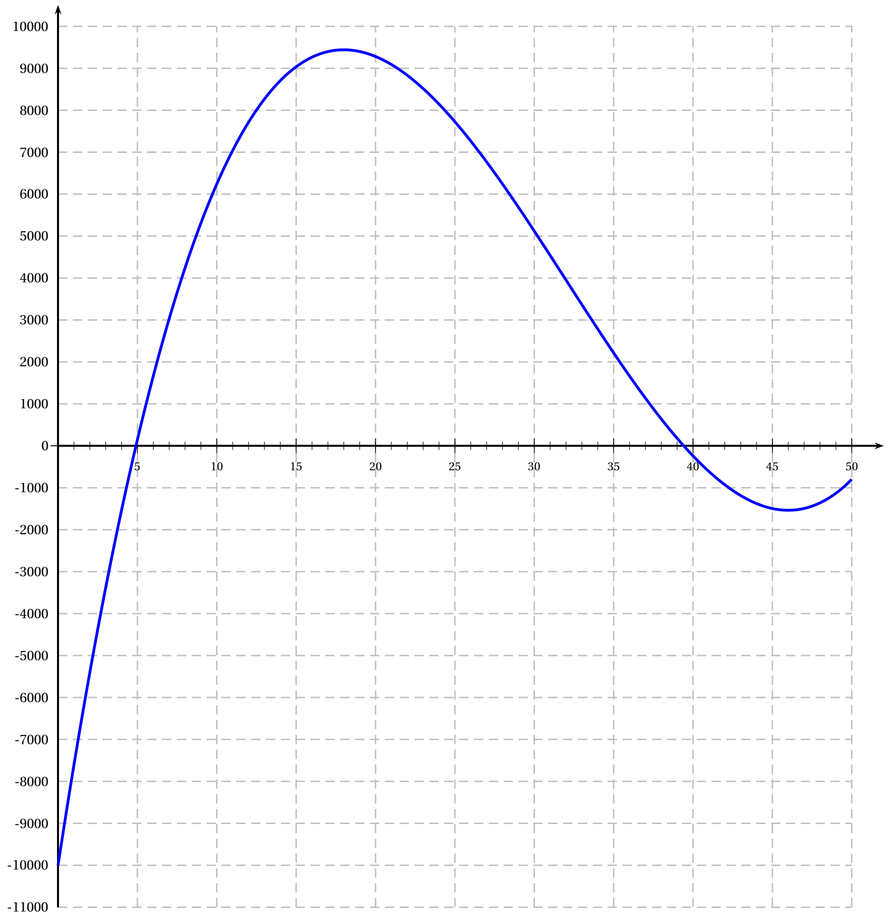
   Au regard de ces résultats, nous devons accepter l'affirmation du fournisseur puisque cette valeur appartient à l'intervalle de fluctuation.

Partie B

Cette usine peut produire en un mois entre 0 et 50 machines agricoles.
On a modélisé le bénéfice de l'entreprise, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 50]$ par :

$$f(x) = x^3 - 96x^2 + 2484x - 10000.$$

On dit que l'entreprise réalise des profits si son bénéfice est strictement positif.
On a tracé la représentation graphique de cette fonction f.



1. Par lecture graphique, le nombre de machines agricoles que doit produire l'entreprise pour réaliser des profits appartient à $]5\,;39]$.
   Nous lisons les abscisses des points pour lesquels la courbe est au dessus de l'axe des abscisses.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f. Calculons $f'(x)$.
   $f'(x) = 3x^2 - 96 \times 2x + 2484 = 3x^2 - 192x + 2484$.
3. Résolvons l'équation : $3x^2 - 192x + 2484 = 0$.
   La dérivée est un polynôme du second degré. Calculons le discriminant.
   $\Delta = (-192)^2 - 4 \times 3 \times 2484 = 7056. \Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{192 - 84}{2 \times 3} = 18$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{192 + 84}{6} = 46$.
   Les solutions de l'équation sont 18 et 46.
4. Étudions d'abord le signe de $f'(x)$.
   Un trinôme du second degré est, lorsque $\Delta > 0$, du signe de a (ici $a = 3$) par conséquent positif sauf pour les valeurs comprises entre les racines
   si $x \in [0\,;\,18[\cup]46\,;\,50]$, $f'(x) > 0$, si $x \in]18\,;\,46[$, $f'(x) < 0$.
   Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
   Sur $]18\,;\,46[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
   Sur $[0\,;\,18[$ ou sur $]46\,;\,50]$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.
   Complétons le tableau de variations ci-dessous :

x	0		18		46		50
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-10000	↗	9440	↘	-1536	↗	-800

5. À l'aide du tableau, le nombre de machines à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal est 18.
   Ce bénéfice maximal s'élève à 9440000 €.