Correction fiche
Nombres premiers entre eux.

Exo 1 ~ Pondichéry 2017

A 1) Dans B3 : " = 2 * B2 + 3 * C2 "

C3 : " = 2 * B2 + C2 "

2) D'après le tableau de valeurs, il semble que $PGCD(u_n, v_n) = 1$

3) ______________________ , on a $\frac{u_{10}}{v_{10}} \simeq 1{,}499\ldots$

et de même on peut calculer les autres quotients.

Il semble que $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1{,}5$

on compare séparément

B 1) Initialisation : $2u_0 - 3v_0 = -1$ et $(-1)^{0+1} = -1$.

donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Mq si $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$ alors $2u_{n+1} - 3v_{n+1} = (-1)^{n+2}$

Or $2u_{n+1} - 3v_{n+1} = 2(2u_n + 3v_n) - 3(2u_n + v_n)$ (cf énoncé)

$= 4u_n + 6v_n - 6u_n - 3v_n$ on compte

$= -2u_n + 3v_n$

$= -(2u_n - 3v_n)$

$= -(-1)^{n+1}$ HR

$= (-1)^{n+2}$ CQFD.

Ccl : ...

2) $d_n = PGCD(u_n, v_n)$ donc $d_n | u_n$ et $d_n | v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 2

Ainsi $d_n | (2u_n - 3v_n) \iff d_n | (-1)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Les diviseurs de $(-1)^{n+1}$ sont 1 et -1, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Comme d_n est le plus grand d'entre eux $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $d_n = 1$

C 1 a) On calcule $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \dots = I_2$

De même $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dots = I_2$.

b) On calcule $Q_n P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

en faisant les produits par 2 au fur et à mesure.

2a) $\frac{u_n}{v_n} = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \times \frac{5}{(-1)^n + 2^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{(-1)^n + 2^{2n+2}}$

Or $\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + \frac{3 \times 2^{2n+1}}{2^{2n+1}}}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + \frac{2 \times 2^{2n+1}}{2^{2n+1}}} = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{2^{2n+1}} \times \frac{2^{2n+1}}{(-1)^n + 2 \times 2^{2n+1}}$

$$= \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{(-1)^n + 2 \times 2^{2n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{(-1)^n + 2^{2n+2}}$$

$$= \frac{u_n}{v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) $\frac{-1}{2^{2n+1}} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} \leq \frac{1}{2^{2n+1}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 0$ car $-1<\frac{1}{2}<1$

de même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{2^{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 0$

D'après le th. des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} = 0$.

Avec le même raisonnement on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}} = 0$.

Par somme et quotient, on obtient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{0+3}{0+2} = 1,5$.

Exo 2 ≃ NC nov. 2018.

(A) 1) a) $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$, $u_7 = 13$,
$u_8 = 21$, $u_9 = 34$, $u_{10} = 55$.

b) Il semble que $PGCD(u_n, u_{n+1}) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}^2 - u_{n+2} \times u_n \\ &= u_{n+1}^2 - (u_{n+1} + u_n) \times u_n \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+1} \times u_n - u_n^2 \\ &= -u_n^2 + u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) \\ &= -u_n^2 + u_{n+1} \times u_{n-1} \\ &= -v_n \end{aligned}$$

b) (v_n) est donc la suite géom. de 1er terme $v_1 = 1$ (4)
et de raison -1.

d'où $v_n = 1 \times (-1)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\iff u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1} = (-1)^{n-1}$

3a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n \mid u_n$ et $d_n \mid u_{n+1}$ donc $d_n \mid (u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1})$

$\iff d_n \mid (-1)^{n-1}$

b) Comme les diviseurs de $(-1)^{n-1}$ sont 1 et -1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$
on a $d_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 0$, on sait déjà que $d_0 = 1$ donc finalement
$d_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

(B) 1) $F^2 = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad F^3 = \dots = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) <u>Init</u> : $n = 1$ $\quad \begin{pmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1 & u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = F$.

donc ok.

<u>Hérédité</u> : Mq <u>si</u> $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$ <u>alors</u> $F^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}$

Or $F^{n+1} = F^n \times F$

$= \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} u_{n+1} + u_n & u_{n+1} \\ u_n + u_{n-1} & u_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}$ CQFD $\qquad$ <u>Ccl</u> : ...

5

3a) $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\iff \begin{pmatrix} u_{2n+3} & u_{2n+2} \\ u_{2n+2} & u_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ u_{n+2} & u_{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

d'où l'égalité voulue.

b) $u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$= u_{n+1}\left(u_{n+2} + u_n\right)$

$= \left(u_{n+2} - u_n\right) \times \left(u_{n+2} + u_n\right)$

$= u_{n+2}^2 - u_n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4) $u_{12} = 144 = 12^2$

et $12 = 2 \times 5 + 2$. On choisit $n = 5$

Ainsi on a $u_{12} = u_7^2 - u_5^2$

$\iff 12^2 = 13^2 - 5^2$

$\iff 13^2 = 12^2 + 5^2$.

Le triangle a pour dimension $(5, 12, 13)$ et est rectangle d'après Pythagore.