Exercices sur les matrices et sur l'arithmétique Révision pour le bac

Exercice 1 : **Pondichéry 2014**

1. (a) D'après le texte, les acheteurs de la marque X le mois $n+1$ sont formés de 50 % des acheteurs de X le mois n donc $0,5x_n$, de 50 % des acheteurs de Y le mois n donc $0,5y_n$, et de 10 % des acheteurs de Z le mois n donc $0,1z_n$; on a donc $x_{n+1} = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n$.

   On admet que : $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n$ et que $z_{n+1} = 0,1x_n + 0,2y_n + 0,7z_n$.

   (b) D'après le texte, on peut dire que pour tout n, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1(1 - x_n - y_n) \\ &= 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1 - 0,1x_n - 0,1y_n = 0,4x_n + 0,4y_n + 0,1 \\ y_{n+1} &= 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2(1 - x_n - y_n) \\ &= 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2 - 0,2x_n - 0,2y_n = 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2 \end{aligned}$$

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

   On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

   Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

   (a) En faisant tourner l'algorithme donné dans le texte, pour $n = 1$ on entre une fois dans la boucle TANT QUE ; on va donc appliquer une fois l'instruction « U prend la valeur $A \times U + B$ ».

   La valeur de U en entrée de boucle est $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$, donc la valeur affichée en sortie est :

   $$U_1 = A \times U_0 + B = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix}$$

   Pour $n = 3$, l'algorithme calcule successivement U_1 puis

   $U_2 = A \times U_1 + B = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,317 \end{pmatrix}$ puis

   $U_3 = A \times U_2 + B = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,317 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}$

   L'affichage obtenu pour $n = 3$ est $\begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}$.

(b) Le mois de janvier correspond à $n = 0$, donc le mois d'avril correspond à $n = 3$.

La matrice U_3 est la matrice $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3868 \\ 0{,}3117 \end{pmatrix}$

Donc la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril est $x_3 = 0{,}3868$.

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $\mathrm{I} - \mathrm{A}$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

   (a) I est la matrice unité d'ordre 2 donc $\mathrm{I} \times \mathrm{C} = \mathrm{C}$.

   $\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{C} + \mathrm{B} \iff \mathrm{I} \times \mathrm{C} - \mathrm{A} \times \mathrm{C} = \mathrm{B} \iff (\mathrm{I} - \mathrm{A}) \times \mathrm{C} = \mathrm{B} \iff \mathrm{N} \times \mathrm{C} = \mathrm{B}$

   (b) On admet que N est une matrice inversible et que $\mathrm{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$.

   $$\mathrm{N} \times \mathrm{C} = \mathrm{B} \iff \mathrm{C} = \mathrm{N}^{-1} \times \mathrm{B} \iff \mathrm{C} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} \iff \mathrm{C} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix} \iff$$

   $$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} \times \frac{1}{10} + \frac{20}{23} \times \frac{2}{10} \\ \frac{10}{23} \times \frac{1}{10} + \frac{30}{23} \times \frac{2}{10} \end{pmatrix} \iff \mathrm{C} = \begin{pmatrix} \frac{45}{230} + \frac{40}{230} \\ \frac{10}{230} + \frac{60}{230} \end{pmatrix} \iff \mathrm{C} = \begin{pmatrix} \frac{85}{230} \\ \frac{70}{230} \end{pmatrix} \iff \mathrm{C} = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$$

4. On note V_n la matrice telle que $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{C}$ pour tout entier naturel n.

   (a) $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{U}_n + \mathrm{B} - \mathrm{C}$; or la matrice C est définie par $\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{C} + \mathrm{B}$.

   Donc $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{U}_n + \mathrm{B} - \mathrm{A} \times \mathrm{C} - \mathrm{B} = \mathrm{A} \times (\mathrm{U}_n - \mathrm{C}) = \mathrm{A} \times \mathrm{V}_n$

   (b) On admet que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \times (\mathrm{U}_0 - \mathrm{C}) + \mathrm{C}$.

   > Remarque : ce résultat s'obtient en partant de l'égalité $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{V}_n$; on pourrait démontrer par récurrence que, pour tout n, $\mathrm{V}_n = \mathrm{A}^n \times \mathrm{V}_0$ ce qui équivaut à $\mathrm{U}_n - \mathrm{C} = \mathrm{A}^n \times (\mathrm{U}_0 - \mathrm{C})$ ou encore $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \times (\mathrm{U}_0 - \mathrm{C}) + \mathrm{C}$.

   Le mois de janvier correspond à $n = 0$ donc le mois de mai correspond à $n = 4$. Les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai sont respectivement x_4, y_4 et z_4.

   On cherche donc U_4 qui donnera x_4 et y_4 ; puis on calculera $z_4 = 1 - x_4 - y_4$.

   À la calculatrice, on trouve : $\mathrm{U}_4 = \mathrm{A}^4 \times (\mathrm{U}_0 - \mathrm{C}) + \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0{,}3794 \\ 0{,}30853 \end{pmatrix}$

   De plus, $1 - 0{,}3794 - 0{,}30853 = 0{,}31207$.

Donc les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai sont respectivement $x_4 = 0{,}3794$, $y_4 = 0{,}30853$ et $z_4 = 0{,}31207$.

Exercice 2 : **Métropole 2013**

1. Pour tout entier naturel n,
   $v_{n+1} = 0,95 \times v_n + 0,01 \times c_n$ et $c_{n+1} = 0,05 v_n + 0,99 c_n$.
2. Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors
   $\begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix}$

   Les réels c et d tels que $\mathrm{A} \times \mathrm{X} = \mathrm{Y}$ sont :
   $c = 0,95a + 0,01b$ et $d = 0,05a + 0,99b$

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n,
$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$ où $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} v_n c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$.

3. (a) Calculons $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Calculons $\mathrm{Q} \times \mathrm{P}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

On constate que les deux produits donnent $(6\mathrm{I}_2)$ donc si au lieu de multiplier P par Q on multiplie P par $\dfrac{1}{6}\mathrm{Q}$ on obtient I_2, donc $\dfrac{1}{6}\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1}$.

(b) Calculons $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \dfrac{1}{6}\mathrm{QAP}$

d'abord , on calcule QA : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$a = 0,95 + 0,05 = 1$; $b = 0,01 + 0,99 = 1$; $c = -5 \times 0,95 + 0,05 = -4,7$,
$d = -0,05 + 0,99 = 0,94$

$\mathrm{QA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix}$

ensuite on fait (QA)P c'est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix}$

Reste à multiplier ce produit par $\frac{1}{6}$; on obtient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice diagonale D.

(c) Démontrons, par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Pour $n = 1$ il s'agit de démontrer que $A = PDP^{-1}$; or $P^{-1}AP = D$ donc en multipliant à gauche par P, on a :

$P(P^{-1}AP) = PD$, or par associativité cela s'écrit encore $(P(P^{-1})AP = PD$ donc $I_2AP = PD$ donc $AP = PD$, en multipliant à droite par P^{-1},on obtient : $(AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, donc

$A = PDP^{-1}$: l'initialisation est prouvée.

Supposons que pour tout entier naturel n, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$, alors multiplions à droite par A :

$A^{n+1} = PD^nP^{-1}A$,

mais ce dernier A c'est $A = PDP^{-1}$ donc

$A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$, or $P^{-1}P = I_2$ donc $A^{n+1} = PD^nI_2DP^{-1}$,

$A^{n+1} = PD^nDP^{-1}$ et enfin

$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion : la relation est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire à partir de ce rang : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettant d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1+5\times 0,94^n\right)v_0 + \frac{1}{6}\left(1-0,94^n\right)c_0.$$

et comme la suite géométrique $\left(0,94^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 vu que $q = 0,94$ donc $-1 < q < 1$

la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\frac{1}{6}(1+5\times 0)\,v_0 + \frac{1}{6}(1-0)\,c_0$ donc vers

$\frac{1}{6}(v_0+c_0) = \frac{250\,000}{6}$ et donc par stabilité de la population totale, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\frac{5}{6}(v_0+c_0) = \frac{1\,250\,000}{6}$.

Exercice 3 : **Antilles Guyanne septembre 2013**

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
        Affecter à X la valeur X −26
Fin du tant que
Afficher X
```

1. Si on saisit 3 comme valeur de A, le nombre X prend la valeur 3 qui est inférieure à 26 donc on n'entre pas dans la boucle « tant que »; l'algorithme affiche la valeur de X donc 3.
2. Si on saisit 55 comme valeur de A, le nombre X prend d'abord la valeur 55 qui est supérieure à 26; la première fois qu'on entre dans la boucle, on remplace X par $X-26 = 55-26 = 29$. Le nombre 29 est encore supérieur ou égal à 26 donc on entre une seconde fois dans la boucle; le nombre X est remplacé par $X-26 = 29-26 = 3$.

   Le nombre 3 est strictement plus petit que 26 donc on n'entre pas dans la boucle et on affiche la valeur de X donc 3.
3. Dans cet algorithme, on soustrait 26 autant de fois que l'on peut du nombre positif X; on obtient un nombre entier compris entre 0 et 25 qui représente le reste de la division de X par 26 et donc le reste de la division de A par 26.

Partie B

1. Explication du codage de RE en DP, autrement dit du passage de $\begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$:

   $$C \times \begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\times17+1\times4\\5\times17+2\times4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}51+4\\85+8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}55\\93\end{pmatrix}$$

   Or $55 = 2\times26+3$ donc 55 a pour reste 3 dans la division par 26.

   Et $93 = 3\times26+15$ donc 93 a pour reste 15 dans la division par 26.

   On passe donc de $\begin{pmatrix}55\\93\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$, donc le codage de RE représenté par $\begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix}$ conduit à DP représenté par $\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$.

2. Soient x_1, x_2, x'_1, x'_2 quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Pour transformer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ par le procédé de codage, on calcule d'abord

   $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$; puis on détermine les restes de $3x_1+x_2$ et de $5x_1+2x_2$ dans la division par 26.

   D'après le texte, on obtient $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ce qui veut dire que z_1 est le reste de $3x_1 + x_2$ dans la division par 26, et que z_2 est le reste de $5x_1 + 2x_2$ dans cette même division.

   Or $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ est également transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, donc z_1 est aussi le reste de $3x'_1 + x'_2$ dans la division par 26, et z_2 le reste de $5x'_1 + 2x'_2$ dans cette même division.

   Les nombres $3x_1 + x_2$ et $3x'_1 + x'_2$ ont le même reste z_1 dans la division par 26 donc ils sont congrus modulo 26. Idem pour $5x_1 + 2x_2$ et $5x'_1 + 2x'_2$.

   On a donc : $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases}$

   (b)

   $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3x_1 + x_2) \equiv 2(3x'_1 + x'_2) \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases} \Rightarrow$$

   $$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \equiv 6x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases} \Rightarrow x_1 \equiv x'_1 \quad (26) \text{ (par soustraction).}$$

   $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3x_1 + x_2) \equiv 5(3x'_1 + x'_2) \quad (26) \\ 3(5x_1 + 2x_2) \equiv 3(5x'_1 + 2x'_2) \quad (26) \end{cases} \Rightarrow$$

   $$\begin{cases} 15x_1 + 5x_2 \equiv 15x'_1 + 5x'_2 \quad (26) \\ 15x_1 + 6x_2 \equiv 15x'_1 + 6x'_2 \quad (26) \end{cases} \Rightarrow x_2 \equiv x'_2 \quad (26) \text{ (par soustraction).}$$

   Donc $x_1 \equiv x'_1 \quad (26)$ et $x_2 \equiv x'_2 \quad (26)$.

On a : $\left.\begin{array}{r} x_1 \equiv x_1' \quad (26) \\ 0 \leq x_1 \leq 25 \\ 0 \leq x_1' \leq 25 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 = x_1'$ et $\left.\begin{array}{r} x_2 \equiv x_2' \quad (26) \\ 0 \leq x_2 \leq 25 \\ 0 \leq x_2' \leq 25 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_2 = x_2'$

Il n'y a donc qu'un couple d'entiers de $[0;25]$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ qui se code en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

3. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

   (a) Soit la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

   $C \times C' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2 + 1\times(-5) & 3\times(-1)+1\times 3 \\ 5\times 2+2\times(-5) & 5\times(-1)+2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $C' \times C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 + (-1)\times 5 & 2\times 1+(-1)\times 2 \\ (-5)\times 3+3\times 5 & (-5)\times 1+3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Donc C' est la matrice inverse de C.

   (b) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3+(-1)\times 15 \\ (-5)\times 3+3\times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 30 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y_1 = -9 \\ y_2 = 30 \end{cases}$

   (c) Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$

   autrement dit $\begin{cases} x_1 \equiv -9 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv 30 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$

   Or $\begin{cases} -9 \equiv 17 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant 17 \leqslant 25 \\ 30 \equiv 4 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant 4 \leqslant 25 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_1 = 17 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

   (d) On peut penser que le décodage d'un couple de lettres se fait de la même manière que son codage en remplaçant la matrice C par la matrice C'.

4. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

   On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \mathrm{C}' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 - z_2 \\ -5z_1 + 3z_2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y'_1 = 2z_1 - z_2 \\ y'_2 = -5z_1 + 3z_2 \end{cases}$

Soient x_1 et x_2, les nombres entiers tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y'_1 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y'_2 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$

$3x_1 + x_2 \equiv 3y'_1 + y'_2 \equiv 3(2z_1 - z_2) + (-5z_1 + 3z_2) \equiv 6z_1 - 3z_2 - 5z_1 + 3z_2 \equiv z_1 \quad (26)$

$5x_1 + z_2 \equiv 5y'_1 + 2y'_2 \equiv 5(2z_1 - z_2) + 2(-5z_1 + 3z_2) \equiv 10z_1 - 5z_2 - 10z_1 + 6z_2$

$\equiv z_2 \quad (26)$

On peut donc dire : $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \quad (26) \end{cases}$

On a donc décodé la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ en la multipliant par la matrice C' pour obtenir $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ puis on a pris les restes module 26 pour obtenir enfin $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Le système obtenu $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \quad (26) \end{cases}$ prouve que la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ se code bien en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et donc que la matrice $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ se décode bien en $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

5. Les deux lettres QC correspondent à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On calcule $\mathrm{C}' \times \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 16 + (-1) \times 2 \\ (-5) \times 16 + 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 - 2 \\ -80 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -74 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 30 = 1 \times 26 + 4 \implies 30 \equiv 4 \quad (26) \text{ avec } 0 \leq 4 \leq 25 \\ -74 = -3 \times 26 + 4 \implies -74 \equiv 4 \quad (26) \text{ avec } 0 \leq 4 \leq 25 \end{cases}$

Le nombre 4 correspond à la lettre E donc QC se décode en EE.

Exercice 4 : **Polynésie 2013**

1. (a) $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

Or $\begin{cases} a_1 = 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 \\ b_1 = 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 \\ b_1 = 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 \end{cases}$.

Finalement $U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$

(b) Pour tout entier naturel n,

$M \times U_n + P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7a_n + 0.2b_n \\ 0.1a_n + 0.6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$(I - M) = \begin{pmatrix} 1 - 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 1 - 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Puis

$(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 0,3 - 0,2 & 2 \times 0,3 - 3 \times 0,2 \\ -0,1 \times 4 + 0,4 & -0,1 \times 2 + 3 \times 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

(b) On calcule $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times (I - M) = I$. Donc $I - M$ est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $U = M \times U + P \iff U - M \times U = P \iff (I - M) \times U = P \iff$

$U = (I - M)^{-1}P$

Finalement $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$.

3. (a) Pour tout entier naturel n,

$V_{n+1} = U_{n+1} - U = MU_n + P - (MU + P) = M(U_n - U) = M \times V_n$.

(b) Par récurrence :

— Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $V_n = M^n \times V_0$.

— *Initialisation* : Si $n = 0$ alors
$M^0 = I$ et $V_0 = M^0 V_0$. $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— *Hérédité* : Supposons que pour tout entier naturel k, $\mathscr{P}_k$ soit vraie (c.-à-d. $V_k = M^k \times V_0$). Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie aussi (c-à-d. $V_{k+1} = M^{k+1} \times V_0$).
$V_{k+1} = MV_k = M \times (M^k \times V_0) = M^{k+1} \times V_0$ et $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

— $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, par le principe de récurrencerécurrence on a bien pour tout entier naturel $n, V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

(a) Pour tout entier naturel n,

$$V_n = U_n - U \iff U_n = V_n + U \iff U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ \\ 270 \end{pmatrix} \iff U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 380 \\ \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 270 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc $a_n = \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 380$

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 380$

(b) Le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme est donc de 380 000.