Devoir Maison final : année coronavirus.

Juin 2020

" Silence la marmaille ! Vous êtes tombés sur la crête ? (ou quoi ?)" [1]

1 Affirmation vraie ou fausse ?

Dans cet exercice, cinq affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.

Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. Soient a et b deux nombres strictement positifs.

   Affirmation 1 : « $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ »

2. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

   Affirmation 2 : « Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a, $\dfrac{a^2-1}{2}$ et $\dfrac{a^2+1}{2}$, alors ce triangle est rectangle. »

3. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

   Affirmation 3 : « La probabilité d'obtenir pile à l'un des deux lancers et face à l'autre est $\frac{1}{3}$. »

4. Un article a le même prix dans deux magasins A et B.

   Dans le magasin A, le prix de l'article subit successivement une baisse de 20% puis une hausse de 20%. Dans le magasin B, le prix de l'article subit successivement une hausse de 20% puis une baisse de 20%.

   Affirmation 4 : « À la suite de ces modifications de prix, il est plus rentable d'acheter alors l'article dans le magasin A que dans le magasin B. »

2 Probabilité

Partie A : Arbre de probabilité

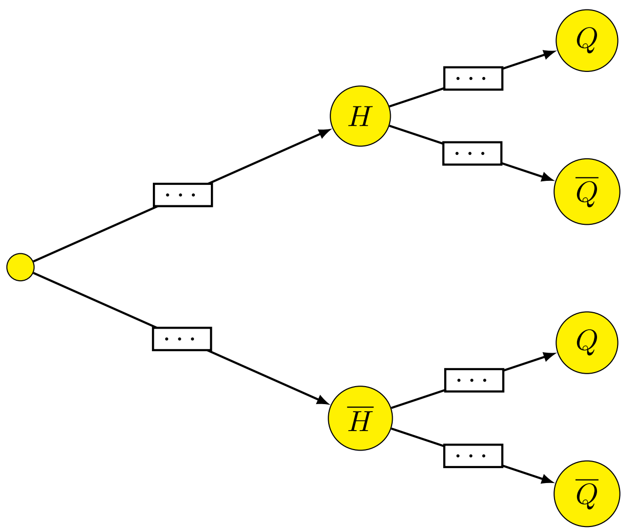
Dans une région, 75% des donneurs sont des hommes. Parmi eux, 25% ont moins de 40 ans. Parmi les femmes donnant leur sang, 50% ont moins de 40 ans.

On interroge au hasard un donneur de sang dans cette région et on considère les événements suivants :

- H : « la personne interrogée est un homme »
- Q : « la personne interrogée a moins de 40 ans ».

$\overline{H}$ désigne l'évènement contraire de H.

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. Calculer la probabilité que la personne interrogée au hasard soit un homme et ait plus de quarante ans.
3. Calculer $P(\overline{H} \cap Q)$.
4. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée ait moins de 40 ans est 0,3125.
5. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit un homme ou ait moins de quarante ans est $0,875$.

Partie B : Intervalle de fluctuation et prise de décision

L'EFS affirme que dans une région donnée : « 23% de la population donne son sang au moins une fois par an ». On interroge au hasard un échantillon de 1 000 personnes habitant cette région. Parmi elles, 254 ont donné au moins une fois leur sang au cours de la dernière année.

Peut-on mettre en doute l'affirmation de l'EFS? Justifier la réponse à l'aide d'un intervalle de fluctuation.

david.zancanaro@ac-montpellier.fr

3 Fractions egyptiennes

On justifiera toutes les réponses.

On appelle « fraction égyptienne » toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre entier naturel non nul. Dans l'Égypte ancienne, on n'écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de sommes de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Par exemple, $\frac{25}{28}$ peut s'écrire $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$.

Le but du problème est de présenter quelques méthodes de décomposition de nombres rationnels en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Partie A : Exemples

1. Calculer la somme des six « fractions égyptiennes » $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$.
2. Décomposer $\frac{5}{8}$ en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes, dont les dénominateurs sont tous des puissances de 2.

Partie B : Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer a un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal au produit de deux nombres entiers naturels impairs p et q.

1. Démontrer la formule
$$\frac{2}{pq}=\frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$
2. Justifier que les dénominateurs des fractions précédentes sont des nombres entiers naturels.
3. En utilisant la formule établie à la question 1., trouver deux décompositions différentes de $\frac{2}{15}$ en somme de « fractions égyptiennes » différentes.
4. Soit n un nombre entier naturel non nul. Donner une décomposition de la fraction $\frac{2}{2n+1}$ en somme de deux « fractions égyptiennes » différentes.

Partie C : « Algorithme glouton » de Fibonacci

En 1201, Léonard de Pise (1175-1250), dit « Fibonacci », prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition :

« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne 0. »

En annexe on a écrit l'algorithme glouton en langage python.

1. Appliquer cet algorithme à $\frac{13}{81}$ et donner une décomposition de la fraction $\frac{13}{81}$ en somme de trois « fractions égyptiennes » toutes différentes.
2. Dans le papyrus Rhind (1650 av. J.-C.), exposé au British Museum, figure une des plus anciennes approximations du nombre π égale à $\frac{256}{81}$ (écriture moderne).
   (a) Écrire $\frac{256}{81}$ sous la forme d'une somme d'un entier naturel et d'une fraction comprise entre 0 et 1.
   (b) Proposer une écriture de l'approximation de π donnée dans le papyrus Rhind sous forme d'une somme d'un nombre entier naturel et de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

4 Fonctions

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3x - 17}{x^2 - 9}$$

1. (a) Quelles sont les valeurs qui interdisent le calcul de $f(x)$?
   (b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer l'image de -1 par f.
3. Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f.
4. (a) Démontrer que pour tout réel x on a $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$
   (b) Dresser le tableau de signe de la fonction f sur $\mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$.
   (c) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$
5. A l'aide de la représentation graphique ci-dessous, dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$.

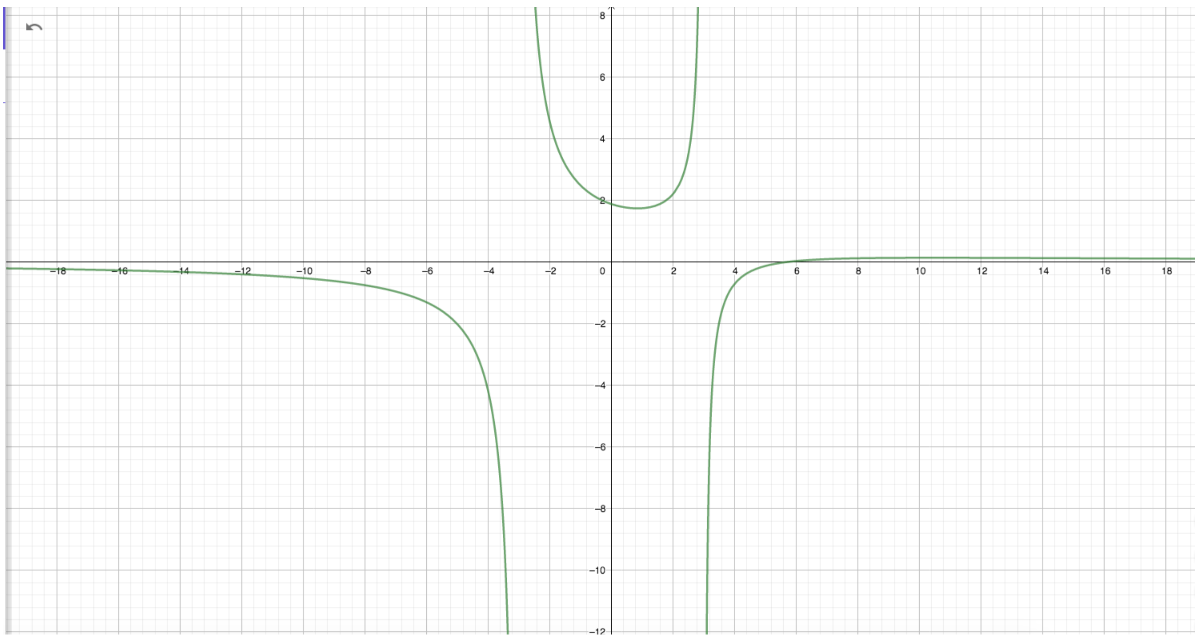


Figure 1: Représentation graphique de la fonction f

david.zancanaro@ac-montpellier.fr

5 Géométrie vectorielle repérée

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A(3;2)$, $B(-2;-3)$ et $C(8;-2)$

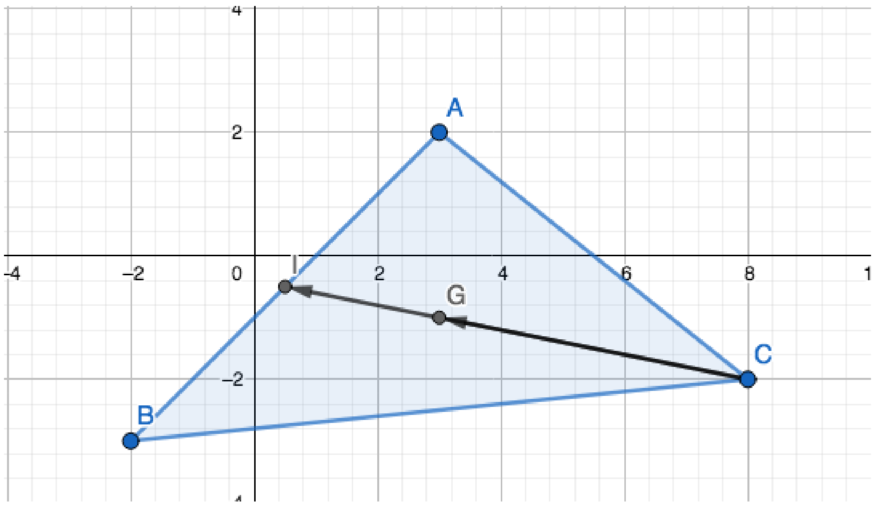


Figure 2: La figure

1. (a) Calculer les longueurs AB, AC et BC.
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.
   Autrement dit on demande si le triangle ABC est isocèle, équilatéral, rectangle ou quelconque.
2. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
3. Calculer les coordonnées de G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

4. Vérifier que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CI}$ sont $(-7,5;1,5)$ puis vérifier que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CG}$ sont $(-5;1)$
5. Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CG}$. Que peut-on déduire de ce résultat ?
6. (a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   (b) le point $D(8;9)$ est-il sur la droite (AB). Si votre réponse est non, déterminer l'ordonnée du point de la droite (AB) dont l'abscisse est 8.

6 Annexe

Algorithme Glouton

main.py

```python
from math import *

def entiere(n):# une fonction qui permet de renvoyer la partie entière du nombre n
    e=0
    if n>0:
        while e<=n:
            e+=1
        return(e-1)
    else:
        while e>n:
            e-=1
        return (e)

def fraction(p,q):#une fonction qui permet de renvoyer le dénominateur de la plus grande fraction égyptienne inférieure à p/q
    g=1
    while g*p<=q:
        g=g+1
    return g

def glouton(p,q):#une fonction qui permet de renvoyer la liste des dénominateurs de la décomposition en
#somme de fraction égyptienne de p/q
    L=[]
    while p!=1:
        g=fraction(p,q)
        L.append(g)
        p=p*g-q
        temp=q
        q=temp*g
        if q/p==entiere(q/p):
            q=q/p
            p=1
    L.append(q)
    return L

```

Figure 3: L'algorithme glouton en langage python

References

[1] Christian Jolibois. *Les P'tites Poules et la Grande Casserole.* Pocket Jeunesse, 2012.

david.zancanaro@ac-montpellier.fr