↜ TRAVAIL MAISON CHAP 7 - F ↝
ECHANTILLONNAGE ET STATISTIQUES

Exercice 1. Dans une commune de plus de 50000 habitants, la proportion de femmes est $0,5$. Le conseil municipal est composé de 43 personnes donc 17 femmes.
Peut-on affirmer qu'au conseil municipal, la parité des sexes n'est pas respectée ?

Exercice 2. Dans une population de truites de rivière, le sex ration (proportion de mâles et de femelles) est de $0,5$ pour chaque sexe. Certaines poluutions par des produits pharmaceutiques modifient ce sex ration en augmentant la proportion de femelles. Sur un prélèvement de 100 truites de rivière, on a relevé une fréquence de femelles égale à $0,64$.
Peut-on considérer que cela est dû au seul hasard ou bien doit-on suspecter une pollution ?

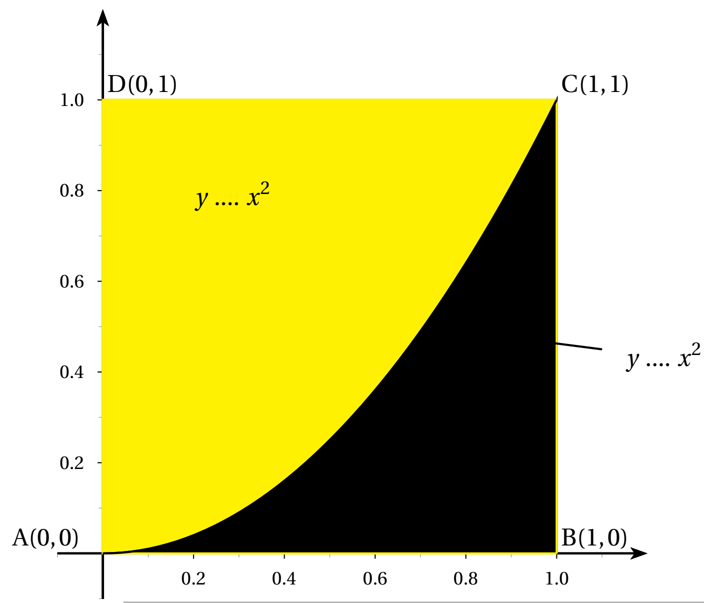
Exercice 3. Lors d'un sondage effectué auprès de 900 personnes, 51% d'entre elles déclarent vouloir voter pour le candidat A. En supposant que les personnes sondées ont répondu sincèrement et qu'elles ne changeront pas d'avis le jour du vote, le candidat A peut-il raisonnablement penser qu'il sera élu au premier tout (c'est-à-dire avec plus de 50% des voix) ?
Pour cela on montrera que $0,48 \leq p \leq 0,54$.

Exercice 4. Supposons 21 personnes dans une pièce. Chacune prend l'argent de sa poche et le pose sur une table : 20 personnes posent 5 euros, et la dernière pose 10 000 euros.

1. Déterminer la moyenne et la médiane de cette série statistique.
2. Supposons désormais que la dernière ne soit pas rentrer dans la pièce, calculer de nouveau la moyenne et la médiane de la nouvelle série statistique.

Exercice 5. La loi des Grands Nombres

Alice, une élève studieuse, lance des fléchettes sur une cible carrée de côté 1. Elle atteint toujours la cible (ie le carré de côté 1) mais comme elle n'est pas très douée, elle pense que sa probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.
elle s'intéresse à la probabilité d'atteindre la zone sous la parabole $y = x^2$. Malheureusement, elle ne sait pas encore calculer cette aire (il l'apprendra peut-être un jour).
elle cherche donc à l'estimer par l'expérience, et pour cela, elle a rédigé l'algorithme ci-dessous.



1. Expliquer en quoi cet algorithme simule le lancer de fléchettes en détaillant ce que représentent X, Y, N, A et K.
2. Que représente l'affichage pour le problème d'Alice ?
3. En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, simuler 500 lancers et noter l'affichage en sortie.
4. Relancer votre programme plusieurs fois en notant les affichages successifs.
   Est-ce toujours les mêmes ? Pourquoi ?
5. Simuler 1 000 (ou même plus) lancers et en déduire une valeur approchée de l'aire sous la parabole.

Remarque : Cette méthode s'appelle la méthode de Monte Carlo. On peut aussi l'utiliser pour trouver une valeur approchée de π.
Il suffit de considérer la courbe représentative de la fonction $y = \sqrt{1-x^2}$ sur $[0,1]$ qui dessine un quart de cercle dans un carré de côté 1. Cependant, il faut beaucoup de lancers pour obtenir une bonne approximation de π.

Algorithme 1 :

```
N est un entier naturel
X et Y sont des réels compris entre 0 et 1
A prend la valeur 0
Saisir N
Pour K allant de 1 à N Faire
    X prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
    Y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
    Si ( Y > X² ) Alors
        A prend la valeur A+1
    Sinon
        K prend la valeur K+1
    Fin Si
Fin Pour
Afficher A/N
```

Les commandes utiles, pour ce programme, en Python

⋆ Utiliser les nombres aléatoires, écrire en début de document : `from random import *`

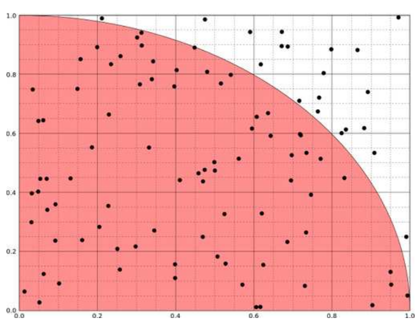
Instruction en langage naturel	En algorithme "de lycée"	En python
A prend la valeur V	A $\longleftarrow$ V	`A=V`
choix d'un nombre aléatoire entre 0 et 1	Choisir un nombre aléatoire entre 0 et 1	`random()`

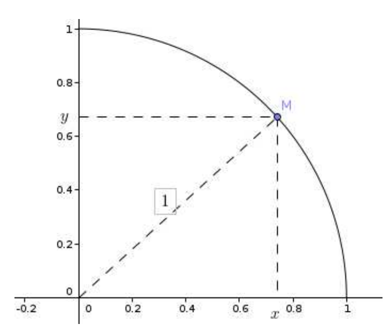
Test	Si *condition*
	Alors *instructions*
	Sinon *instructions*
	FinSi
		`if` *`condition`* `:`
		`instructions`
		`else :`
		`instructions`
		
		Une condition d'égalité s'écrit `A==B` (double égal)
		"A différent de B" s'écrit `A!=B`
		Le retour à gauche marque la fin de la conditionnelle

Itérations	pour i allant de 1 à n faire *instructions* Fin pour	`for i in range(n) :` *`instructions`* Le retour à gauche marque la fin de la boucle

Autour de la méthode de Monte Carlo

Un exemple pour estimer la valeur de π.





Voici la courbe d'une fonction f dans le carré comme dans l'exemple précédent.

On choisit un point au hasard (autrement dit on choisit une abscisse au hasard entre 0 et 1 et de même on choisit une ordonnée au hasard entre 0 et 1). On s'intéresse à la probabilité d'être à l'intérieur du quart de cercle.

Ce quart de cercle a pour aire $\dfrac{\pi r^2}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

Autrement dit la probabilité de choisir un point à l'intérieur du cercle vaut $\dfrac{\pi}{4}$ et donc 4 fois notre probabilité vaut π.

On va faire une simulation à l'aide de Python pour trouver expérimentalement une valeur approchée de π.

Pour ce faire il faudrait connaître la formule relative à la fonction déssinée.

Ainsi soit un point $M(x, y)$ appartenant au quart de cercle (dont le rayon vaut 1) comme on l'a représenté ci-dessus. En appliquant le théorème de Pythagore (et en se souvenant que x et y désigne tous deux des nombres positifs) on obtient $x^2 + y^2 = 1^2 \Longleftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$.

La fonction f dont la représentation graphique est le quart de cercle dans le carré est $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. On peut désormais faire tourner sur python l'algorithme qui nous donnera une approximation de π.

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
from random import *
from math import *

def echantillon(n):
    Nombre=0
    for i in range(n):
        x=random()
        y=random()
        if y<sqrt(1-x*x):
            Nombre=Nombre+1
    return Nombre/n

n=10000000
print("une approximation de pi est",4*echantillon(n))
```

```
File  Edit  Shell  Debug  Options  Window  Help
Python 3.6.9 (default, Apr 18 2020, 01:56:0
[GCC 8.4.0] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "lic
>>>
 RESTART: /home/muaddib/Documents/2019-2020
ions/montecarlo.py
0.7784
>>>
 RESTART: /home/muaddib/Documents/2019-2020
ions/montecarlo.py
une approximation de i est 3.1348
>>>
 RESTART: /home/muaddib/Documents/2019-2020
ions/montecarlo.py
une approximation de pi est 3.14232
>>>
 RESTART: /home/muaddib/Documents/2019-2020
ions/montecarlo.py
une approximation de pi est 3.1411292
>>>
```

On a simulé ici un million de lancers pour obtenir que $\pi \simeq 3.1411292$ qui est une approximation « médiocre » de π mais qui est tout de même une approximation de π.