# Corrigé du devoir maison final : année coronavirus.

Juin 2020

---

" Silence la marmaille ! Vous êtes tombés sur la crête ? (ou quoi ?)" [1]

## 1 Affirmation vraie ou fausse ?

Dans cet exercice, cinq affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.

Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. Soient $a$ et $b$ deux nombres strictement positifs.

   **Affirmation 1** : « $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ »

   Si l'affirmation était vraie alors elle le serait quelque soit les valeurs de $a$ et de $b$. Si $a=9$ et $b=16$ alors $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$. D'autre part $\sqrt{a+b}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$. L'affirmation 1 n'est donc pas vraie quelque soit les valeurs de $a$ et $b$, elle est donc fausse.

2. Soit $a$ un nombre réel strictement supérieur à 1.

   **Affirmation 2** : « Si les longueurs des côtés d'un triangle sont $a$, $\dfrac{a^2-1}{2}$ et $\dfrac{a^2+1}{2}$, alors ce triangle est rectangle. »

   Nous allons essayer d'appliquer Pythagore :

   $$\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2=\frac{(a^2+1)^2}{4}=\frac{a^4+2a^2+1}{4}$$

   D'autre part :

   $$a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=a^2+\frac{(a^2-1)^2}{4}=\frac{4a^2}{4}+\frac{a^4-2a^2+1}{4}=\frac{4a^2+a^4-2a^2+1}{4}=\frac{a^4-2a^2+1}{4}$$

   On observe que quelque soit la valeur de $a$ on a :

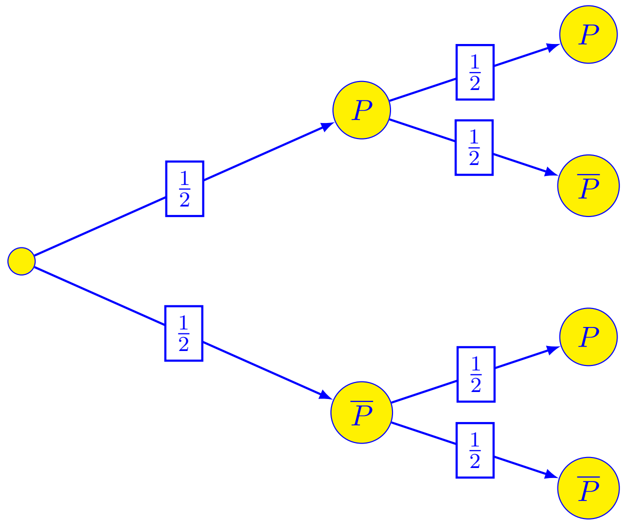
   $$\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2=a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2$$

   Ainsi d'après la réciproque du théorème de Pythagore si les longueurs des côtés d'un triangle sont $a$, $\dfrac{a^2-1}{2}$ et $\dfrac{a^2+1}{2}$, alors ce triangle est rectangle.

3. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

   **Affirmation 3** : « La probabilité d'obtenir pile à l'un des deux lancers et face à l'autre est $\frac{1}{3}$. » Notons $P$ l'événement " la pièce est tombée sur Pile" et réalisons un arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire :


david.zancanaro@ac-montpellier.fr




Appliquons alors les régles de calcul sur les arbres de probabilité, il existe deux manières d'obtenir pile à l'un des deux lancers et face à l'autre dont la probabilité vaut :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

L'affirmation était donc fausse.

4. Un article a le même prix dans deux magasins $A$ et $B$.

   Dans le magasin $A$, le prix de l'article subit successivement une baisse de 20% puis une hausse de 20%. Dans le magasin $B$, le prix de l'article subit successivement une hausse de 20% puis une baisse de 20%.

   **Affirmation 4** : « À la suite de ces modifications de prix, il est plus rentable d'acheter alors l'article dans le magasin $A$ que dans le magasin $B$. »

   Notons d'une manière générale $x$ le prix d'un tel article.
   Après une baisse de 20% son prix est de $x \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = x \times 0,80 = 0,80x$ puis suite à une hausse de 20% son prix est de $0,8x \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) - 0,8x \times 1,2 = 0,96x$
   Ainsi si $x$ est le prix d'un article alors dans la magasin A après une baisse de 20% et une hausse de 20% il coûte $0,96x$.
   Après une hausse de 20% son prix est de $x \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = x \times 1,20 = 1,2x$ puis suite à une baisse de 20% son prix est de $1,2x \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) - 1,2x \times 0,8 = 0,96x$
   Ainsi si $x$ est le prix d'un article alors dans la magasin B après une hausse de 20% et une baisse de 20% il coûte $0,96x$.
   Au final quelque soit le prix de départ de l'article, suite à ces modifications de prix, l'article a le même prix dans les magasins A et B. L'affirmation 4 est donc fausse.

## 2 Probabilité

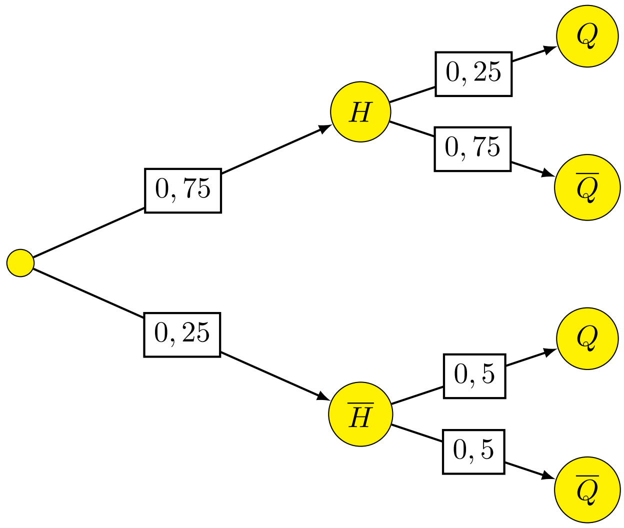
### Partie A : Arbre de probabilité

Dans une région, 75% des donneurs sont des hommes. Parmi eux, 25% ont moins de 40 ans.
Parmi les femmes donnant leur sang, 50% ont moins de 40 ans.
On interroge au hasard un donneur de sang dans cette région et on considère les événements suivants :

- H : « la personne interrogée est un homme »
- Q : « la personne interrogée a moins de 40 ans ».

$\overline{H}$ désigne l'évènement contraire de H.

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité suivant :




2. Calculer la probabilité que la personne interrogée au hasard soit un homme et ait plus de quarante ans.

On doit calculer la probabilité de l'événement $H \cap \overline{Q}$ qui vaut :

$$P(H \cap \overline{Q}) = 0,75 \times 0,75 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

3. Calculer $P(\overline{H} \cap Q)$.

$$P(\overline{H} \cap Q) = 0,25 \times 0,5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

4. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée ait moins de 40 ans est 0,3125.

On cherche la probabilité de l'événement $Q$ :

$$P(Q) = P(H \cap Q) + P(\overline{H} \cap Q) = 0,75 \times 0,25 + \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125$$

5. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit un homme ou ait moins de quarante ans est $0,875$.

On cherche la probabilité de l'événement $H \cup Q$ :

$$P\left(H \cup Q\right) = P(H \cap Q) + P(H \cap \overline{Q}) + P(\overline{H} \cap Q) = 0,75 \times 0,25 + 0,75 \times 0,75 + 0,25 \times 0,5 = \frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \frac{2}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

**Partie B : Intervalle de fluctuation et prise de décision**

L'EFS affirme que dans une région donnée : « 23% de la population donne son sang au moins une fois par an ». On interroge au hasard un échantillon de 1 000 personnes habitant cette région. Parmi elles, 254 ont donné au moins une fois leur sang au cours de la dernière année.

Peut-on mettre en doute l'affirmation de l'EFS? Justifier la réponse à l'aide d'un intervalle de fluctuation.

On teste l'hypothèse $p = 23\%$ de la population donne son sang au moins une fois par an à l'aide d'un échantillon de taille $n = 1000$ où la fréquence observée de personnes donnant son sang au moins une fois par an vaut $f = \dfrac{254}{1000} = 0,254$.

Nous savons, qu'à cause de la flucutation d'échantillonnage, la fréquence $f$ oscille théoriquement dans au moins 95% des cas entre les valeurs $p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,23 - \dfrac{1}{\sqrt{1000}} \simeq 0,198$ et $p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,23 + \dfrac{1}{\sqrt{1000}} \simeq 0,262$ du moins dès lors que $n \geq 25$ (ce qui est le cas) et lorsque $p$ est compris entre $0,2$ et $0,8$ (ce qui est le cas aussi).

On observe :

$$0,198 < f = 0,254 < 0,262$$

On considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est $p$ n'est pas remise en question.

# 3 Fractions egyptiennes

*On justifiera toutes les réponses.*

On appelle « fraction égyptienne » toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$, $n$ désignant un nombre entier naturel non nul. Dans l'Égypte ancienne, on n'écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de sommes de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Par exemple, $\frac{25}{28}$ peut s'écrire $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$.

**Le but du problème est de présenter quelques méthodes de décomposition de nombres rationnels en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes.**

## Partie A : Exemples

1. Calculer la somme des six « fractions égyptiennes » $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{32}{64}+\frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

2. Décomposer $\frac{5}{8}$ en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes, dont les dénominateurs sont tous des puissances de 2.

$$\frac{5}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$$

## Partie B : Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer a un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal au produit de deux nombres entiers naturels impairs $p$ et $q$.

1. Démontrer la formule

$$\frac{2}{pq}=\frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

Rappelons que $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ si et seulement si $ad=bc$. $(\star)$
Appliquons ce principe après avoir un petit simplifier l'expression qui figure dans le membre de droite :

$$\frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}=\frac{q}{qp\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{p}{qp\left(\frac{p+q}{2}\right)}=\frac{q+p}{\frac{qp^2+pq^2}{2}}=(q+p)\times\left(\frac{2}{qp^2+pq^2}\right)=\frac{2q+2p}{qp^2+pq^2}$$

Nous cherchons désormais à vérifier que $\dfrac{2}{pq}=\dfrac{2q+2p}{qp^2+pq^2}$, appliquons le principe $\star$ :
D'une part :

$$2\times(qp^2+pq^2)=2qp^2+2pq^2$$

donne le même résultat que :

$$pq\times(2q+2p)=2pq^2+2p^2q$$

ce qui prouve bien que

$$\frac{2}{pq}=\frac{2q+2p}{qp^2+pq^2}$$

2. Justifier que les dénominateurs des fractions précédentes sont des nombres entiers naturels.

Nous devons donc justifier que $pq$, $p\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $q\left(\frac{p+q}{2}\right)$ sont des entiers naturels sachant que $p$ et $q$ sont des nombres impairs.
Le produit de deux nombres entiers est encore un nombre entier ce qui prouve que $pq$ est bien un entier naturel.
La somme de deux nombres impair est un nombre pair donc $p+q$ est pair, par conséquent $\dfrac{p+q}{2}$ est un entier naturel ; le produit de deux entiers naturels est encore un entier naturel donc $p\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $q\left(\frac{p+q}{2}\right)$ sont des entiers naturels.

3. En utilisant la formule établie à la question 1., trouver deux décompositions différentes de $\frac{2}{15}$ en somme de « fractions égyptiennes » différentes.

On peut écrire 15 comme le produit de deux nombres impairs de deux manières différentes $15 = 3 \times 5 = 1 \times 15$.

L'écriture $15 = 3 \times 5$ et la formule démontrée dans la question 1 offre une première décomposition avec $p = 3$ et $q = 5$ :

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{3 \times \left(\dfrac{3+5}{2}\right)} + \frac{1}{5 \times \left(\dfrac{3+5}{2}\right)} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

L'écriture $15 = 1 \times 15$ et la formule démontrée dans la question 1 offre une deuxième décomposition avec $p = 1$ et $q = 15$ :

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{1 \times \left(\dfrac{1+15}{2}\right)} + \frac{1}{15 \times \left(\dfrac{1+15}{2}\right)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

4. Soit $n$ un nombre entier naturel non nul. Donner une décomposition de la fraction $\frac{2}{2n+1}$ en somme de deux « fractions égyptiennes » différentes.

Remarquons que quelque soit l'entier naturel $n$ alors $2n+1$ est un nombre impair (un nombre "pair"+1) par conséquent on peut écrire $2n+1$ comme le produit de deux nombres impairs disctints et appliqué la formule démontrée dans la question 1.

On décompose $2n+1 = 1 \times (2n+1)$ et on applique la formule avec $p = 1$ et $q = 2n+1$ ce qui donne :

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{1 \times \left(\frac{1+2n+1}{2}\right)} + \frac{1}{15 \times \left(\dfrac{1+2n+1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{2n+2}{2}} + \frac{1}{\frac{30n+30}{2}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{15n+15}$$

## Partie C : « Algorithme glouton » de Fibonacci

En 1201, Léonard de Pise (1175-1250), dit « Fibonacci », prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition :

« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne 0. »

*En annexe on a écrit l'algorithme glouton en langage python.*

1. Appliquer cet algorithme à $\frac{13}{81}$ et donner une décomposition de la fraction $\frac{13}{81}$ en somme de trois « fractions égyptiennes » toutes différentes.

La plus grande fraction égyptienne est $\dfrac{1}{2}$ et elle est supérieure à $\dfrac{13}{81}$, de même pour $\dfrac{1}{3}$ ou encore pour $\dfrac{1}{4}$,etc.., puis $\dfrac{1}{6} > \dfrac{13}{81}$ puisque $13 \times 6 < 81$. En revanche $\dfrac{1}{7} < \dfrac{13}{81}$.

On effectue la soustraction proposée :

$$\frac{13}{81} - \frac{1}{7} = \frac{13 \times 7 - 81}{7 \times 81} = \frac{10}{567}$$

On réitère le processus avec la fraction $\dfrac{10}{567}$. $567/10 = 56,7$ donc $\dfrac{1}{56} > \dfrac{10}{567}$ et $\dfrac{1}{57} < \dfrac{10}{567}$ donc la fraction égyptienne la plus grande inférieure à $\dfrac{10}{567}$ est $\dfrac{1}{57}$, nous effectuons donc la soustraction proposée :

$$\frac{10}{567} - \frac{1}{57} = \frac{1}{10773}$$

On réitère le processus avec la fraction $\dfrac{1}{10773}$ qui est déjà une fraction egyptienne, on peut lui soustraire "elle-même" :

$$\frac{1}{10773} - \frac{1}{10773} = 0$$

L'algorithme glouton prend fin. Au final on obtient :

$$\frac{13}{81} - \frac{1}{7} - \frac{1}{567} - \frac{1}{10773} = 0 \Longleftrightarrow \frac{13}{81} = \frac{1}{7} + \frac{1}{567} + \frac{1}{10773}$$

2. Dans le papyrus Rhind (1650 av. J.-C.), exposé au British Museum, figure une des plus anciennes approximations du nombre $\pi$ égale à $\frac{256}{81}$ (écriture moderne).

(a) Écrire $\frac{256}{81}$ sous la forme d'une somme d'un entier naturel et d'une fraction comprise entre 0 et 1.

$$\frac{256}{81}=\frac{3\times 81+13}{81}=\frac{3\times 81}{81}+\frac{13}{81}=3+\frac{13}{81}$$

(b) Proposer une écriture de l'approximation de $\pi$ donnée dans le papyrus Rhind sous forme d'une somme d'un nombre entier naturel et de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Il s'agit de faire le lien entre les deux questions précédentes

$$\frac{256}{81}=3+\frac{13}{81}=3+\frac{1}{7}+\frac{1}{567}+\frac{1}{10773}$$

# 4 Fonctions

Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3x-17}{x^2-9}$$

1. (a) Quelles sont les valeurs qui interdisent le calcul de $f(x)$ ?

   Il est impossible de diviser par 0 ce qui arrive ici lorsque $x^2 - 9 = 0$ autrement dit lorsque $x^2 = 9$ et donc lorsque $x = \pm 3$.

   $x = 3$ ou $x = -3$ interdisent le calcul de $f(x)$.

   (b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction $f$.

   $f$ est définie lorsque $x \neq \pm 3$ donc :

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$$

2. Calculer l'image de $-1$ par $f$.

$$f(-1) = \frac{3\times(-1)-17}{(-1)^2-9} = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$$

3. Déterminer les antécédents éventuels de 0 par $f$.

   On cherche les réels $x \neq \pm 3$ qui vérifient $f(x) = 0 \iff \dfrac{3x-17}{x^2-9} = 0$ ce qui équivaut à :

$$(3x-17)\times 1 = 0\times(x^2-9) \longleftrightarrow 3x-17 = 0 \iff 3x = 17 \iff x = \frac{17}{3}$$

4. (a) Démontrer que pour tout réel $x$ on a $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

   Pour tout réel $x$ on a :

$$(x-3)(x+3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 9$$

   (b) Dresser le tableau de signe de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{17}{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-17$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | |
| $x-3$ | | | | $-$ | | | $0$ | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | | | $+$ | | | |
| $\frac{3x-17}{(x-3)(x+3)}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

   (c) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$

   Il s'agit juste d'une lecture graphique, on observe deux changements de variation qui ont lieu pour les abscisses $0,5$ et $8$ approximativement bien sûr d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\simeq 0,5$ | | $3$ | | $\simeq 8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $\simeq 1,7$ | $\nearrow$ | $\Vert$ | $\nearrow$ | $\simeq 0,4$ | $\searrow$ | |

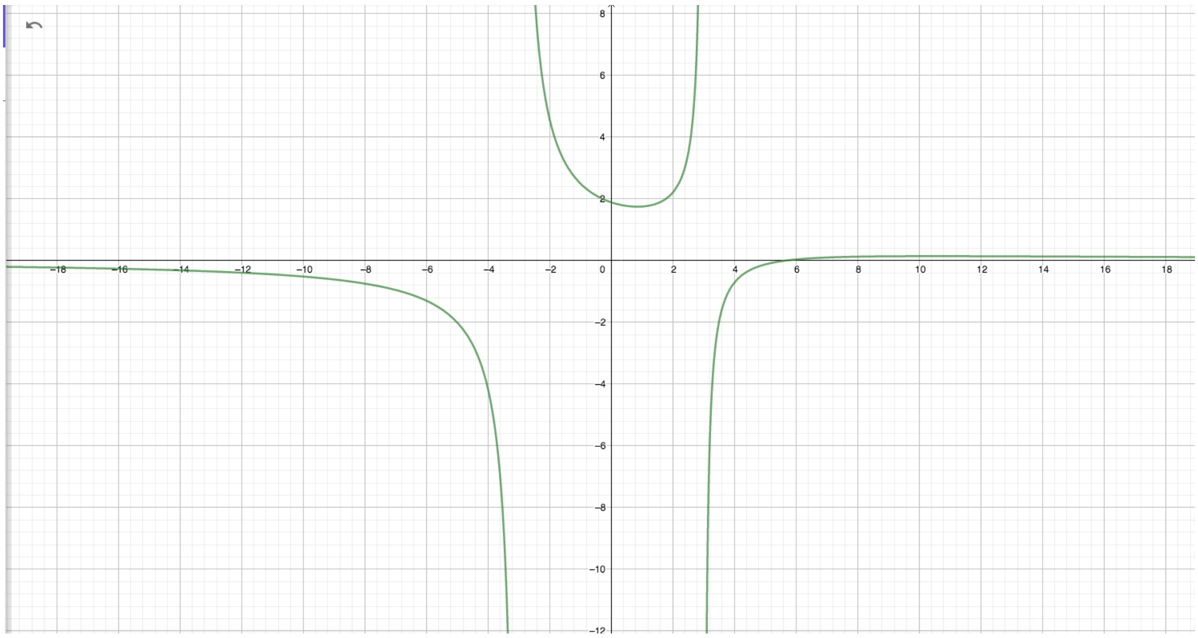


Figure 1: Représentation graphique de la fonction $f$

## 5 Géométrie vectorielle repérée

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points $A(3;2)$, $B(-2;-3)$ et $C(8;-2)$

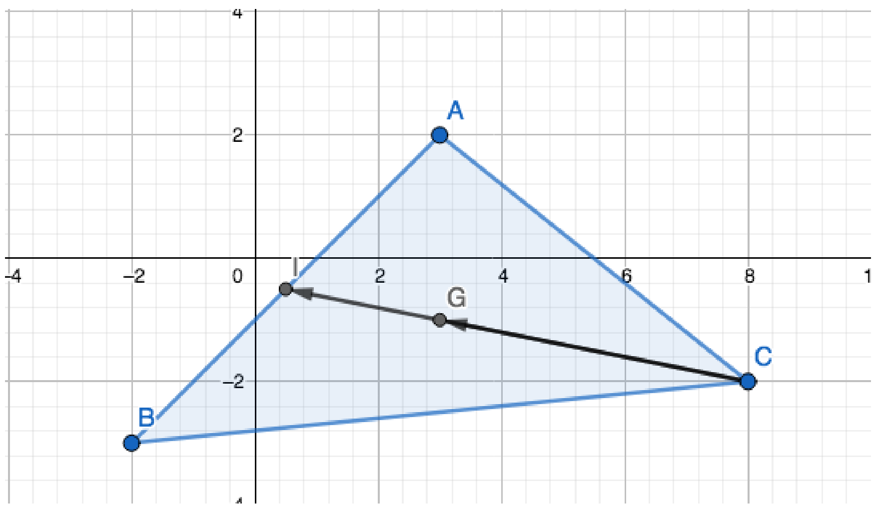



Figure 2: La figure

1. (a) Calculer les longueurs $AB$, $AC$ et $BC$.

   *Autrement dit on demande si le triangle $ABC$ est isocèle, équilatéral, rectangle ou quelconque.*

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(8-3)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$
$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(8-(-2))^2+(-2-(-3))^2}=\sqrt{100+1}=\sqrt{101}$$

   (b) En déduire la nature du triangle $ABC$.

   Le triangle $ABC$ n'est ni isocèle ni équilatéral. De plus $BC^2=101$ et $AB^2+AC^2=50+41=91\neq 101$ donc d'après le théorème de Pythagore le triangle $ABC$ n'est pas rectangle.

2. Calculer les coordonnées du milieu $I$ du segment $[AB]$.

Le milieu $I$ du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \iff I\left(\frac{3+(-2)}{2};\frac{2+(-3)}{2}\right) \iff I\,(0,5;-0,5)$$

3. Calculer les coordonnées de $G$ tel que :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

Calculons les coordonnées de tous les vecteurs figurant dans cette égalité :

$$\overrightarrow{GA}(3-x_G;2-y_G) \quad ; \quad \overrightarrow{GB}(-2-x_G;-3-y_G) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC}(8-x_G;-2-y_G)$$

Puisque $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ il suit que :

$$\begin{cases} 3-x_G+(-2)-x_G+8-x_G &=0\\ 2-y_G+(-3)-y_G+(-2)-y_G &=0\end{cases} \iff \begin{cases} 9-3x_G &=0\\ -3y_G-3 &=0\end{cases} \iff \begin{cases} -3x_G &=-9 \Longrightarrow x_G=3\\ -3y_G &=3 \Longrightarrow y_G=-1\end{cases}$$

Ainsi

$$G(3;-1)$$

4. Vérifier que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CI}$ sont $(-7,5;1,5)$ puis vérifier que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CG}$ sont $(-5;1)$

$$\overrightarrow{CI}(0,5-8;-0,5-(-2) \iff \overrightarrow{CI}(-7,5;1,5)$$
$$\overrightarrow{CG}(3-8;-1-(-2)) \iff \overrightarrow{CG}(-5;1)$$

5. Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CG}$. Que peut-on déduire de ce résultat ?

$$det\left(\overrightarrow{CI};\overrightarrow{CG}\right)=\begin{vmatrix} -7,5 & -5\\ 1,5 & 1\end{vmatrix}=-7.5\times 1-(-5)\times 1,5=-7,5+7,5=0$$

Puisque le déterminant de ces deux vecteurs est nul il suit que $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires et donc que les points $C$, $I$ et $G$ sont alignés.

6. (a) Déterminer une équation de la droite $(AB)$.

$$M(x;y)\in(AB) \longrightarrow det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0$$

Or,

$$\overrightarrow{AM}(x-3;y-2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB}(-2-3;-3-2) \Longrightarrow \overrightarrow{AB}(-5;-5)$$

et par conséquent :

$$det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} x-3 & -5\\ y-2 & -5\end{vmatrix}=-5(x-3)-(-5)(y-2)=-5x+15+5(y-2)=-5x+15+5y-10=-5x$$

Nous pouvons enfin conclure, une équation de la droite $(AB)$ est :

$$-5x+5y+5=0 \iff -x+y+1=0 \iff y=x-1$$

(b) le point $D(8;9)$ est-il sur la droite $(AB)$. Si votre réponse est non, déterminer l'ordonnée du point de la droite $(AB)$ dont l'abscisse est 8.

$9\neq 8-1$ ce qui prouve que $D\notin(AB)$, l'ordonnée du point de la droite $(AB)$ dont l'abscisse est 8 est :

$$y=8-1=7$$

Ainsi le point $E(8;7)$ est le point de la droite $(AB)$ dont l'abscisse est 7.

# 6 Annexe

Algorithme Glouton

main.py

```
from math import *

def entiere(n):# une fonction qui permet de renvoyer la partie entière du nombre n
    e=0
    if n>0:
        while e<=n:
            e+=1
        return(e-1)
    else:
        while e>n:
            e-=1
        return (e)

def fraction(p,q):#une fonction qui permet de renvoyer le dénominateur de la plus grande fraction égyptienne inférieure à p/q
    g=1
    while g*p<=q:
        g=g+1
    return g

def glouton(p,q):#une fonction qui permet de renvoyer la liste des dénominateurs de la décomposition en
#somme de fraction égyptienne de p/q
    L=[]
    while p!=1:
        g=fraction(p,q)
        L.append(g)
        p=p*g-q
        temp=q
        q=temp*g
        if q/p==entiere(q/p):
            q=q/p
            p=1
    L.append(q)
    return L

```

Figure 3: L'algorithme glouton en langage python

## References

[1] Christian Jolibois. *Les P'tites Poules et la Grande Casserole.* Pocket Jeunesse, 2012.