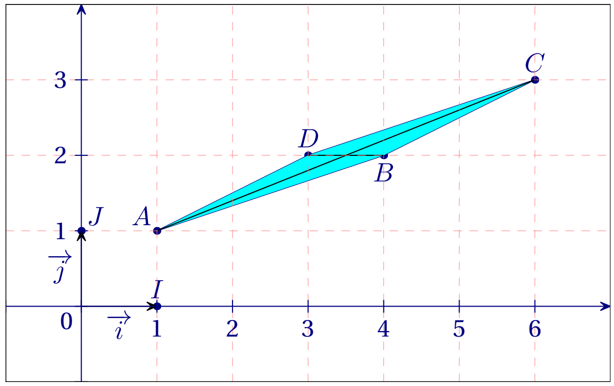
# ∽ Correction Travail maison chap 9 - A ∾
# Géométrie vectorielle analytique

**Exercice 1.** Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points $A(1;1)$, $B(4;2)$, $C(6;3)$ et $D(3;2)$.




1. **Une première manière de prouver que ABCD est un parallélogramme.**

   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

   On calcule les coordonnées des deux vecteurs à l'aide de la formule du cours :
   $$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$
   ce qui donne :
   $$\overrightarrow{AB}(4-1;2-1) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}(3;1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{DC}(6-3;3-2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{DC}(3;1)$$

   (b) Que constate-t-on ? Que peut-on en déduire ?

   On constate que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux, par conséquent le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2. **Une deuxième manière de prouver que ABCD est un parallélogramme.**

   (a) Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AC] puis celle du milieu J du segment [DB].

   On applique la formule permettant de calculer les coordonnées du milieu d'un segment en effectuant la moyenne des coordonnées des extrémités de ce segment :
   $$I\left(\frac{1+6}{2};\frac{1+3}{2}\right) \Longleftrightarrow I(3.5;2)$$
   De même pour le point J :
   $$J\left(\frac{4+3}{2};\frac{2+2}{2}\right) \Longleftrightarrow J(3.5;2)$$

   (b) Que constate-t-on ? Que peut-on en déduire ?

   On constate que les I = J puisqu'ils ont les mêmes coordonnées, par conséquent les diagonales [AC] et [BD] ont même milieu ce qui suffit à prouver que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

3. (a) Calculer les longueurs AB et BC.

   On utilise cette fois la formule permettant de calculer la longueur d'un segment. On peut le faire puisque le repère est orthonormal :
   $$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$
   de même pour BC :
   $$BC = \sqrt{(6-4))^2 + (3-2))^2} = \sqrt{5}$$

   (b) Que peut-on en déduire quant à la nature du quadrilatère ABCD ?

   $AB \neq BC$ par conséquent le quadrilatère ABCD n'est ni un losange ni un carré.

4. Déterminer les coordonnées du point E de sorte que ABEC soit un parallélogramme.

   *Indication* : *On utilisera le fait que* ABEC *est un parallélogramme si et seulement si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

On sait que $\overrightarrow{AB}(3;1)$ donc si ABEC est un parallélogramme il suit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ et donc

$$\overrightarrow{CE}(3;1)$$

D'autre part $\overrightarrow{CE}(x_E - 6; y_E - 3)$, on en déduit donc que :

$$x_E - 6 = 3 \qquad \text{et} \qquad y_E - 3 = 1$$

Par conséquent :

$$E(9;4)$$

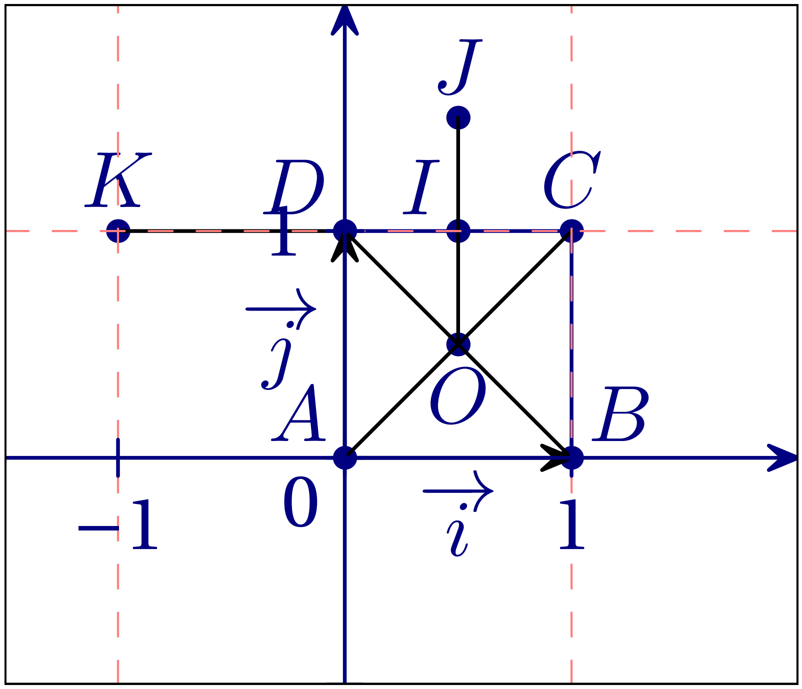
**Exercice 2.** Dans un repère orthonormé (O;I;J) du plan on donne les points $A(3;1)$, $B(2;3)$, $C(-4;0)$ et $D(-3;-2)$.

*Meme si ce n'est pas demandé il est recommandé de faire une figure.*

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AB}(2-3;3-1)$ donc $\overrightarrow{AB}(-1;2)$
   De même $\overrightarrow{DC}(-4-(-3);0-(-2))$ d'où $\overrightarrow{DC}(-1;2)$
   Enfin $\overrightarrow{AC}(-4-3;0-1)$ d'où $\overrightarrow{AC}(-7;-1)$
2. Que pouvez-vous de suite déduire sur la nature du quadrilatère ABCD ?
   On observe que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ par conséquent ABCD est un parallélogramme.
3. Calculer AB, AC et BC.
   Puisque $\overrightarrow{AB}(-1;2)$ alors $AB = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
   De même, puisque $\overrightarrow{AC}(-7;-1)$ alors $AC = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$
   Enfin $BC = \sqrt{(-4-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$
4. Calculer les coordonnées des milieux respectifs L et K des segments [AB] et [AC].
   $$L\left(\frac{3+2}{2};\frac{3+1}{2}\right) \iff L(2.5;2)$$
   $$K\left(\frac{3+(-4)}{2};\frac{1+0}{2}\right) \iff K(-0.5;0.5)$$
5. Démontrer alors que ABCD est un rectangle. Est-ce un carré ?
   $$AB^2 + BC^2 = 5 + 45 = 50 = AC^2$$
   donc d'après la réciproque du théorème de pythagore ABC est un triangle rectangle en B.
   Or d'après la question 2 on sait que ABCD est un parallélogramme et un parallélogramme qui possède un angle droit est un rectangle.
   Enfin $AB \neq BC$ donc ABCD n'est pas un carré.
6. Calculer les coordonnées de son centre O.
   Le centre O du quadrilatère ABCD est le milieu de n'importe laquelle de ses diagonales, donc par exemple le milieu de [AC] donc $O = K$ et nous avons déjà calculé ses coordonnées lors de la question 4. Au final le centre a pour coordonnée :
   $$O(-0.5;0.5)$$

**Exercice 3.** Soit ABCD un carré de centre O et de côté 1. On considère les points suivants : I est le milieu de [CD], J est le symétrique de O par rapport à I et K est le symétrique de C par rapport à D.

1. Faire une figure.




2. On se place dans le repère orthonormal $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

   (a) Déterminer, sans justifier, les coordonnées de A, B, C, D et O.
   $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ et $(0.5;0.5)$.

   (b) Déterminer, en justifiant par un calcul, les coordonnées de I, J et K.
   I est le milieu du segment [CD] donc :
   $$I\left(\frac{1+0}{2};\frac{1+1}{2}\right) \Longleftrightarrow I(0.5;1)$$
   J est le symétrique de O par rapport à I donc I est le milieu de [OJ] d'où $x_I = \dfrac{x_J + x_O}{2}$ d'où $0.5 = \dfrac{x_J + 0.5}{2} \Longleftrightarrow x_J = 0.5$ de même $y_I = \dfrac{y_J + y_O}{2} \Longleftrightarrow 1 = \dfrac{y_J + 0.5}{2} \Longleftrightarrow 2 = y_J + 0.5 \Longleftrightarrow 1.5 = y_J$. On en déduit que :
   $$J(0.5;1.5)$$
   Enfin K est le symétrique de C par rapport à D donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DK}$ et donc :
   $$x_D - x_C = x_K - x_D \Longleftrightarrow 0-1 = x_K - 0 \Longleftrightarrow x_K = -1$$
   et
   $$y_D - y_C = y_K - y_D \Longleftrightarrow 1-1 = y_K - 1 \Longleftrightarrow 0 = y_K - 1 \Longleftrightarrow y_K = 1$$
   Au final :
   $$K(-1;1)$$

   (c) Démontrer que le triangle BJK est isocèle rectangle.
   $$BJ = \sqrt{(0.5-1)^2 + (1.5-0)^2} = \sqrt{0.25+2.25} = \sqrt{2.5}$$
   $$JK = \sqrt{(-1-0.5)^2 + (1-1.5)^2} = \sqrt{2.25+0.25} = \sqrt{2.5}$$
   On observe que $JK = JB$ donc BJK est un triangle isocèle.
   Enfin
   $$KB = \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
   Par conséquent $KB^2 = 5$ et $JK^2 + JB^2 = 2.5 + 2.5 = 5$ donc $KB^2 = JK^2 + JB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle JKB est un triangle rectangle.
   Au final on a bien démontré que le triangle BJK est isocèle rectangle.