☙ TRAVAIL MAISON CHAP 9 - C ❧
GÉOMÉTRIE VECTORIELLE ANALYTIQUE

Exercice 1.

On considère un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;5)$.

   $M(x;y) \in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\iff det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = 0$

   On calcule alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ puis leur déterminant :

$$\overrightarrow{AM}(x-3;y-1) \qquad \text{et} \qquad det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ y-1 & 5 \end{vmatrix} = (x-3)\times 5-(y-1)\times(-1) = 5x-15+y-1 = 5x+y-16$$

$$M(x;y)\in d \iff det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = 0$$

   Ainsi d admet pour équation :$5x+y-16=0 \iff y=-5x+16$

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B(5;3)$ et $C(1;-3)$.

   $M(x;y) \in d' \iff \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires $\iff det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}) = 0$

   On calcule alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis leur déterminant :

$$\overrightarrow{BM}(x-5;y-3) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BC}(-4;-6) \qquad \text{et} \qquad det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} x-5 & -4 \\ y-3 & -6 \end{vmatrix} = (x-5)\times(-6)-(y-3)\times(-4) = -6x+30+4y-12 = -6x+4$$

$$M(x;y)\in d' \iff det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}) = 0$$

   Ainsi d' admet pour équation :$-6x+4y+18=0 \iff y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$

Exercice 2.

On considère un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et les droites $d : 2x-y=4$ et $d' : -6x+3y=9$.

1. Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse 1 de la droite d.

   d a pour équation $2x-y=4$ donc si $x=1$ on a $2-y=4$ et donc $y=-2$.
   L'ordonnée du point d'abscisse 1 de la droite d est $y=-2$.

2. Donner un vecteur directeur de d.

   On vient de voir que d passe par le point de coordonnées $(1;-2)$ mais d passe aussi par le point de coordonnées $(0;-4)$ ainsi un vecteur directeur de d a pour coordonnées $\vec{u}(-1;-2)$.
   Tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\vec{u}$ dirige aussi la droite d autrement dit l'ensemble des vecteurs de coordonnées $(-k;-2k)$ où $k\in\mathbb{R}^*$ sont l'ensemble des vecteurs directeurs de d.

3. Etudier le parallélisme entre les droites d et d'.

   On exhibe deux points de la droite d' : $A(0;3)$ et $B(1;5)$ donc d' est dirigée par le vecteur $\vec{u'}(1;2)$.
   d et d' sont parallèles si et seulement si elles admettent des vecteurs directeurs colinéaires.

$$det(\vec{u};\vec{u'}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -1\times 2-(-2)\times 1 = 0$$

   Ainsi les vecteurs qui dirigent les droites d et d' sont colinéaires ce qui prouvent que les droites d et d' sont parallèles.

4. On considère les points $A(5;1)$ et $B(1;1)$.

   (a) Déterminer une équation de la droite (AB).

   $M(x;y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\iff det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0$

   On calcule alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ puis leur déterminant :

$$\overrightarrow{AM}(x-5;y-1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB}(-4;0) \qquad \text{et} \qquad det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-5 & -4 \\ y-1 & 0 \end{vmatrix} = (x-5)\times 0-(y-1)\times 4 = -4y+4$$

$$M(x;y)\in d \iff det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0$$

   Ainsi d admet pour équation :$-4y+4=0 \iff y=1$

(b) Etudier le parallélisme entre les droites (AB) et d puis si elles ne sont pas parallèles, déterminer leur point d'intersection.

La droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses tandis que la droite d non. Il est donc tout à fait impossible que les droites (AB) et d soient parallèles. Notons C le point d'intersection de ces deux droites il a pour ordonnée $y = 1$ puisqu'il est sur la droite (AB) et donc en utilisant l'équation de la droite d on trouve son abscisse :

$$2x - 1 = 4 \iff 2x = 3 \iff x = 1.5$$

Ainsi $C(1.5;1)$

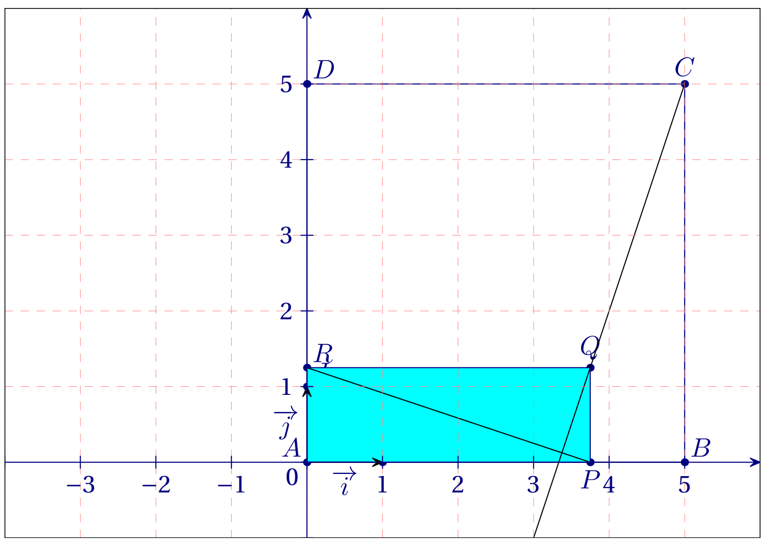
Exercice 3.

Soit ABCD un carré de côté 5. Soit a un réel de l'intervalle $[0;5]$. On appelle P le point de [AB] tel que $AP = a$, R le point de [AD] tel que $DR = a$ et Q le point tel que APQR soit un rectangle.

Pour simplifier la résolution de ce problème, on se place dans un repère orthonormal $(A;\vec{i},\vec{j})$ avec

$$A(0,0) \quad ; \quad B(5,0) \quad ; \quad C(5,5) \quad ; \quad D(0,5) \quad ; \quad P(a,0) \quad ; \quad Q(a,5-a) \quad \text{et} \quad R(0,5-a)$$

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.



Soit I le point de [AB] tel que $AI = 1$ et J le point de [AD] tel que $AJ = 1$. On se place dans le repère orthonormal $\left(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)$.

1. Soit S le point tel que CQPS soit un parallélogramme. Calculer les coordonnées de S.

   CQPS est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{SP}$.
   Or, $\overrightarrow{CQ}(a-5;5-a-5) \iff \overrightarrow{CQ}(a-5;-a)$ et $\overrightarrow{SP}(a-x_S;-y_S)$.
   Par conséquent $a - x_S = a - 5 \iff x_S = 5$ et $-y_S = -a \iff y_S = a$.

2. Démontrer que PRS est un triangle rectangle.

$$PR = \sqrt{(0-a)^2+(5-a)^2} = \sqrt{a^2+25-10a+a^2} = \sqrt{2a^2-10a+25}$$
$$SP = \sqrt{(a-5)^2+(0-a)^2} = \sqrt{2a^2-10a+25}$$
$$RS = \sqrt{(5-0)^2+(a-5+a)^2} = \sqrt{25+4a^2-20a+25} = \sqrt{4a^2-20a+50}$$

   Comme $RS^2 = 4a^2-20a+50$ et $PR^2+PS^2 = 2a^2-10a+25+2a^2-10a+25 = 4a^2-20a+50 = RS^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle PRS est rectangle en P ; il est même rectangle isocèle.

3. Conclure.

   On sait que PSCQ est un parallélogramme donc les droites (PS) et (CQ) sont perpendiculaires. On sait aussi que les droites (PS) et (PR) sont perpendiculaires, par conséquent on conclut que les droites (CQ) et (PR) sont aussi perpendiculaires.