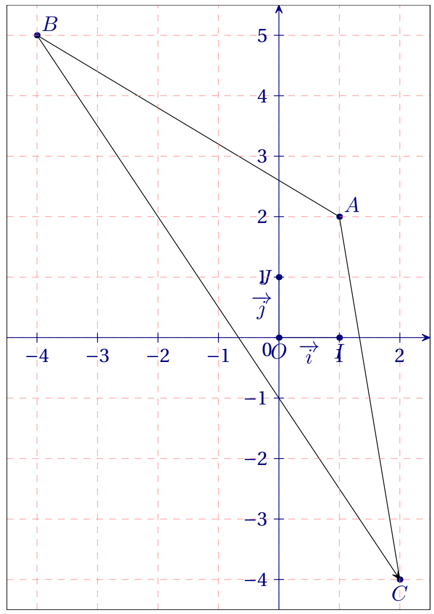
∾ CORRECTION DU TRAVAIL MAISON CHAP 9 - B ∾
GÉOMÉTRIE VECTORIELLE ANALYTIQUE

Exercice 1.

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(1;2)$, $B(-4;5)$ et $C(2;-4)$.
Soit $H(x_H;y_H)$ le point du plan tel que :

$$3\overrightarrow{AH}-4\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}$$



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$.

$$\overrightarrow{AH}(x_H-1;y_H-2)$$
$$\overrightarrow{BC}(2-(-4);-4-5)\iff\overrightarrow{BC}(6;-9)$$
$$\overrightarrow{BH}(x_H+4;y_H-5)$$

2. En déduire les coordonnées du point H.

On déduit de l'égalité $3\overrightarrow{AH}-4\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}$:

$$3\overrightarrow{AH}-4\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\iff\begin{cases}3(x_H-1)-4\times 6 & =x_H+4\\ 3(y_H-2)-4\times(-9) & =y_H-5\end{cases}\iff\begin{cases}2x_H & =4+27=31\\ 2y_H & =-5-30=-35\end{cases}\iff\begin{cases}x_H & =15.5\\ y_H & =-17.5\end{cases}$$

Au final $H(15.5;-17.5)$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et on donne les points $A(1;2)$, $B(-4;5)$ et $C(2;-4)$.

Le but de l'exercice est de démontrer que A, M et N sont alignés.

1. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BM}(x_M+4;y_M-5)$$
$$\overrightarrow{BC}(2+4;-4-5)\iff\overrightarrow{BC}(6;-9)$$

(b) En déduire les coordonnées du point M.

On déduit de l'égalité $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\iff\begin{cases}x_M+4 & =\frac{1}{3}\times 6\\ y_M-5 & =\frac{1}{3}\times(-9)\end{cases}\iff\begin{cases}x_M & =2-4=-2\\ y_M & =-3+5=2\end{cases}$$

Au final $M(-2;2)$.

2. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AN}(x_N-1;y_N-2)$$
$$\overrightarrow{AB}(-4-1;5-2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}(-5;3)$$
$$\overrightarrow{AC}(2-1;-4-2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AC}(1;-6)$$

(b) En déduire les coordonnées du point N.

On déduit de l'égalité $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_N-1 & =2\times(-5)+1 \\ y_N-2 & =2\times 3-6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_N & =-9+1=-8 \\ y_N & =0+2=2 \end{cases}$$

Au final $N(-8;2)$.

3. (a) Calculer $det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN})$.

$$\overrightarrow{AM}(-3;0) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AN}(-9;0)$$
$$det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN})=\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -9 & 0 \end{vmatrix}=-3\times 0-(-9)\times 0=0$$

(b) En déduire que A, M et N sont alignés.

Puisque $det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN})=0$, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires et donc les points A, M et N sont alignés.

Exercice 3. On donne $A(-4;-1)$, $B(-1;1)$, $C(3;3)$, $D(-1;-3)$ et $E(5;1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

On calcule leur déterminant, et pour ce faire il nous faut déterminer leurs coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}(-1+4;1+1) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}(3;2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{DE}(5+1;1+3) \Longleftrightarrow \overrightarrow{DE}(6;4)$$
$$det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE})=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=3\times 4-2\times 6=0$$

Puisque $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE})=0$ on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

2. En déduire la nature du quadrilatère ABED

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires il suit que les droites (AB) et (DE) sont parallèles et donc le quadrilatère ABED est un trapèze.

3. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

On calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et pour cela on calcule les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}(3;2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}(3+4;3+1) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AC}(7;4)$$
$$det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=3\times 4-2\times 7=-2\neq 0$$

Puisque $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\neq 0$ on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc que les points A, B et C ne sont pas alignés.