Dans ce cours, on va étudier une nouvelle fonction qui n'est pas affine et qui est définie pour tout nombre réel non nul par :

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

Elle n'est pas définie pour $x=0$, son ensemble de définition est donc :

$$\mathrm{D}_f=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

I. Au sujet des variations et des symétries de « l'inverse »

Complétons d'abord un tableau de valeurs pour comprendre mieux cette fonction :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	?	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

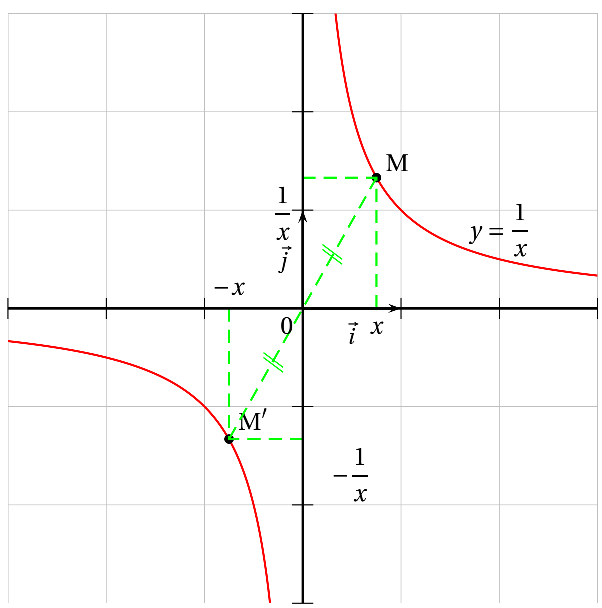
On constate deux choses :

— On observe que l'inverse d'un nombre x (même d'un nombre négatif) est l'opposé de l'inverse de son opposé $-x$ autrement dit :

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$$

Cette égalité impliquera des symétries particulières pour sa représentation graphique.

— dans un premier temps pour des valeurs de x négative la fonction inverse décroit, puis elle décroit de nouveau pour des valeurs de x positives; autrement dit la fonction inverse semble strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et semble strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. En revanche elle n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$!!



Définition 1.

On dit qu'une fonction f est **impaire** lorsque sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.
Cela arrive lorsque $f(-x)=-f(x)$ comme c'est le cas pour la fonction inverse.
La représentation graphique de la fonction inverse est une **hyperbole**.

Travail de l'élève : Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

1. Vérifier que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$
2. Etudier le signe de $\dfrac{b-a}{ab}$.
3. En déduire l'ordre de $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$.

Propriété 1 :

La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Preuve

Voir l'activité pour les positifs. On procède de même sur les négatifs.
On considère donc deux nombres négatifs a et b tels que $a < b (< 0)$
On cherche à comparer $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$
Reprenons le modèle de l'activité du dessus et calculons

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$$

Puisque a et b sont deux nombres négatifs leur produit ab est positif.
D'autre part, puisque $a < b$ alors $b - a$ est positif.
Au final le quotient de deux nombres positifs est positif, donc $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} > 0$ ce qui montre que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
On vient donc de démontrer que si $a < b (< 0$ alors leur inverse sont rangés dans l'ordre inverse $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ ce qui précisément montre que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

D'après le tableau de variations, la fonction inverse n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $\dfrac{1}{-0.012}$ et $\dfrac{1}{-0.099}$
2. $\dfrac{1}{\pi - 3}$ et $\dfrac{1}{0.21}$
3. $\dfrac{1}{\pi - 3}$ et $\dfrac{1}{-0.21}$
4. $\dfrac{1}{2-\sqrt{7}}$ et $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$

II. La fonction inverse est la fonction définie par $f(x) = \dots$

La fonction inverse possède un quotient, mais pas racine. Son quotient existe dès que ……… donc elle est définie sur ……………

Propriété 2 : *Sens de variation et signe*

La fonction inverse ……………… sur les ……………… et ……………… sur les ………………
Elle est donc strictement ……………… sur …………… et strictement ……………… sur ……………
On connait également son signe.

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Variation de f	
Signe de $f(x)$	

Remarques :

- La fonction inverse n'admet pas d'extremum sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
- La fonction étant négative sur $\mathbb{R}^-$, sa courbe représentative est ……………… de l'axe des abscisses sur $]-\infty;0[$.
- La fonction étant positive sur $\mathbb{R}^+$, sa courbe représentative est ……………… de l'axe des abscisses sur $]0;+\infty[$.

Exercice 1 :

Comparer les nombres suivants sans les calculer : $\frac{1}{2.43}$ et $\frac{1}{2.151}$ puis $\frac{1}{-1.002}$ et $\frac{1}{-0.999}$.
2.43 et 2.151 sont tous deux ………… Or ………………………………………………
Donc

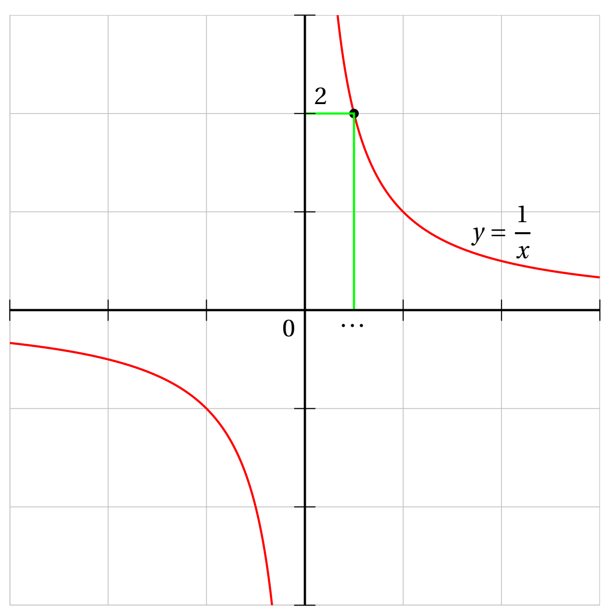
$$2.43\ldots\ldots 2.151 \Longrightarrow \frac{1}{2.43}\ldots\ldots\frac{1}{2.151}$$

-1.002 et -0.999 sont tous deux …………… Or ………………………………………………
Donc :

$$-1.002\ldots 0.999 \Longrightarrow \frac{1}{-1.002}\ldots\ldots\frac{1}{-0.999}$$

Définition 2 : *Propriété*

La courbe repésentative de la fonction inverse est appelée …………
Dans un repère orthonormal, l'hyperbole est symétrique par rapport à …………



Exercice 2 :

Grâce à la courbe de la fonction inverse, résoudre les équations suivantes $\frac{1}{x} < 2$ et $\frac{1}{x} > 2$.
Dans le premier cas, on lit $\mathscr{S} =$ ……………
Dans le second, on lit $\mathscr{S} =$ ……………