Table des matières

Seconde

Polynôme du second degré

D.Zancanaro
zancanaro.math@gmail.com

27 avril 2020

I Généralité

I.1 Polynôme du premier degré = fonction affine non constante

Definition 1. Une fonction P pouvant s'écrire pour tout réel x sous la forme $P(x) = ax + b$ où $a \neq 0$ et b sont deux réels est une fonction polynôme du premier degré. Autrement dit les polynôme du premier degré sont les fonctions affines.

Remarque.
— Rappelons que la représentation graphique de ces fonctions est une droite, puisque $a \neq 0$ cette droite est non parallèle aux axes des abscisses et des ordonnées.
— Les fonctions constantes sont des fonctions affines qui ne sont pas des fonctions polynôme du premier degré.

Propriété 1. *Considérons une fonction polynôme du premier degré telle que $f(x) = ax + b$.*
Dans ce cas, quelque soit les nombres réels x et y (avec $x \neq y$) on a :

$$a = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Preuve. Puisque $f(x) = ax + b$ et $f(y) = ay + b$ on obtient par soustraction $f(x) - f(y) = ax - ay = a(x - y)$ d'où le résultat. □

Exercice 1. Déterminer les fonctions affines connaissant deux images (ou deux points) (citer des exemples).

I.2 Polynôme du second degré ou trinôme du second degré

Definition 2. Toute fonction P pouvant s'écrire pour $x \in \mathbb{R}$ sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$, b et c trois nombres réels est une fonction polynôme du second degré.

Exemple . Les fonctions suivantes sont des trinôme du second degré :
— $f(x) = x^2$ (ici $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$)
— $f(x) = 3x^2 + 4$ (ici $a = 3$, $b = 0$ et $c = 4$).
— $f(x) = 2x(3 - x) = 6x - x^2$ ($a = -1$, $b = 6$ et $c = 0$).
— $f(x) = 14x^2 - 3x + 2$ avec $a = 14$, $b = -3$ et $c = 2$.

La donnée de trois nombres suffit à définir un unique trinôme du second degré, tandis que la donnée de deux nombres (le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine) suffit à définir une unique fonction affine.

I.3 Etude d'un trinôme

Soit P la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$P(x) = (-2x + 3)(5 + 4x)$$

Cette fonction est le produit de deux fonctions affines, nous allons démontrer qu'il s'agit bien d'un trinôme du second degré :

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $P(x) = -10x - 8x^2 + 15 + 12x = -8x^2 + 2x + 15$.
Il s'agit bien d'un trinôme du second degré puisque nous pouvons l'écrire sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$
L'image de 0 par P vaut :

$$P(0) = -8 \times 0^2 + 2 \times 0 + 15 = 15$$

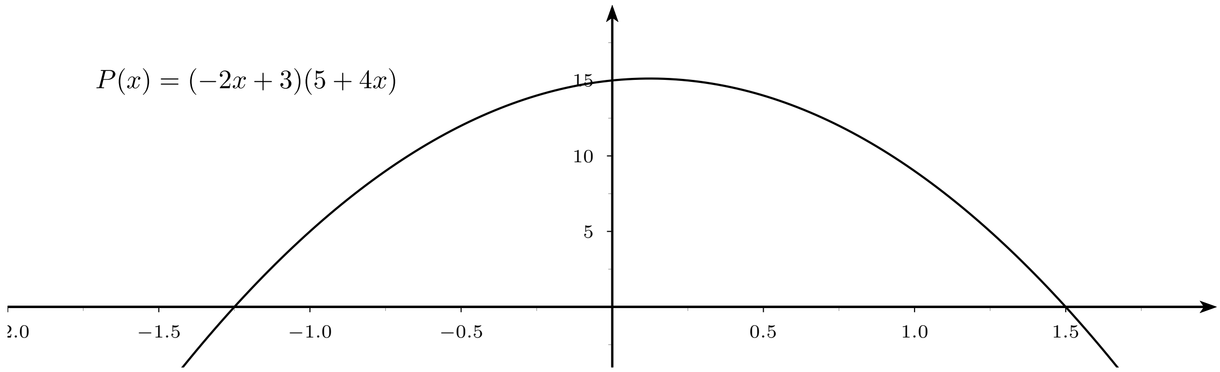
Cela correspond à "l'ordonnée à l'origine des fonctions affines".
Les antécédents de 0 par P sont obtenus en utilisant la forme factorisée :

$$\begin{aligned} & P(x) = 0 \\ \iff & (-2x+3)(5+4x) = 0 \\ \iff & -2x+3 = 0 \quad \text{ou} \quad 5+4x = 0 \\ \iff & x = 1,5 \quad \text{ou} \quad x = -1,25 \end{aligned}$$

Ainsi 0 admet deux antécédents par P qui sont $-1,25$ et $1,5$.
De la forme factorisée nous pouvons déduire le signe de la fonction P résumé dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1.25		1.5		$+\infty$
$-2x+3$			$+$		0	$-$	
$5+4x$		$-$	0		$+$		
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

A partir de toutes les informations qui précèdent nous pouvons esquisser la représentation graphique de la fonction P.



Definition 3. La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est appelée **parabole**.

A partir de l'étude de cette fonction nous pouvons émettre quelques conjectures :

Conjecture 1.
- *La fonction P est croissante puis décroissante ou l'inverse. Le signe de a indique dans quel cas on se trouve, si $a > 0$ alors P est décroissante puis croissante, sinon c'est l'inverse.*
- *La représentation graphique de la fonction P admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.*
- *La fonction P admet un maximum si $a < 0$ ou un minimum dans le cas où $a < 0$.*
- *0 admet aucun antécédent, ou 1 antécédent ou 2 antécédents.*

II Propriété des trinômes

II.1 Forme canonique

Propriété 2. *Toute fonction trinôme admet une écriture dans laquelle l'inconnue x figure une seule fois, écriture qui est appelée forme canonique du trinôme.*

Exemple . Soit $P(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2$

Preuve. La démonstration de la propriété précédente utilise les identités remarquables comme dans l'exemple précédent. □

Remarque. Toute fonction trinôme admet donc une écriture du type :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Propriété 3. *Toute parabole admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.*

II.2 Variation des trinômes du second degré

Propriété 4. *Si $a > 0$ alors P est décroissante puis croissante inversement si $a < 0$. Le changement variation a lieu en une valeur de x qui se lit sur la forme canonique de P.*

II.3 Extremum de la fonction trinôme

Propriété 5. *Soit P une fonction trinôme du second degré alors :*
- *Si $a > 0$ alors P admet un minimum qui se lit sur la forme canonique de P, au contraire si $a < 0$ alors P admet un maximum qui se lit sur la forme canonique de P.*
- *sa représentation graphique est symétrique par rapport à une droite d'équation $x = e$ qui est parallèle à l'axe des ordonnées où e est la valeur pour laquelle l'extremum est atteint.*

II.4 Quelques problèmes

Exercice 2. On découpe 4 carrés de cotés x dans les coins d'un rectangle de longueur 5 et de largeur 2. On fabrique alors une boite et on s'intéresse à son volume, comment choisir x pour que le volume de la boite soit maximal ?

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $\mathscr{C}_f$ est sa représentation graphique dans un repère.

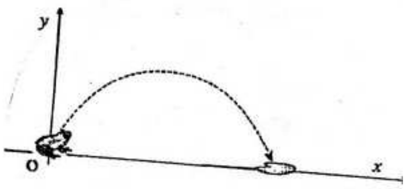
1. Donner la nature de $\mathscr{C}_f$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 2$.
3. En déduire du sommet de $\mathscr{C}_f$ puis son ordonnée.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Démontrer que pour tout réel x on a $f(x) = (x-2)^2 - 2$. Comment appelle-t-on cette écriture de f ?

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x-5)^2 + 2$.

1. Justifier que f est une fonction polyôme du second degré et décrire la nature de sa représentation graphique.
2. Expliquer pourquoi 2 est le maximum de f.
3. En déduire les coordonnées du sommet S de la représentation graphique de f.
4. Dresser son tableau de variation.

Exercice 5.

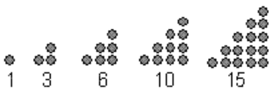
Une grenouille saute d'un nénuphar au nénuphar voisin suivant une partie de la courbe qui a pour équation $y = -3.72x^2 + 1,143x$ dans le repère ci-dessous (x et y mesurent des longueurs en m).



1. Quelle est la longueur de son saut au cm près ?
2. Quelle hauteur, au cm près, a-t-elle atteint ?

Exercice 6.

Les mathématiciens ont l'habitude de représenter certains nombres de manière géométrique. Les nombres ci-dessous sont appelés « nombre triangulaires ».



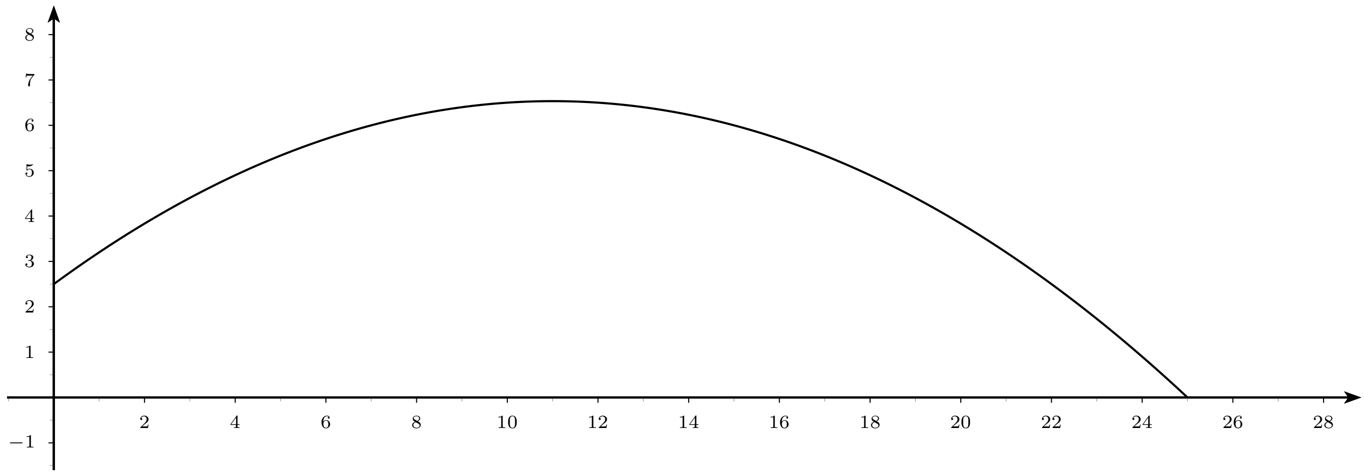
On a $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, $T_5 = 15$ etc...

On cherche une formule donnant le n-ième nombre triangulaire T_n en fonction de n.

1. (a) Dessiner le nombre triangulaire suivant T_6. Que vaut T_6 ?
   (b) Déterminer T_6 et T_7.
2. (a) En assemblant « tête-bêche » deux représentation de T_4, en déduire T_4.
   (b) Généraliser le processus pour déterminer T_n.
3. On voudrait connaître le premier nombre triangulaire dont le nombre de petits carrés dépasse 1000.
   (a) Démontrer que cela revient à résoudre l'inéquation suivante :
   $$n^2 + n - 2000 > 0$$
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2000$.
      i. Déterminer les antécédents de -2000 par f.
      ii. En déduire l'abscisse du sommet puis l'ordonnée du sommet de la représentation graphique.
      iii. En déduire la forme canonique de f puis l'utiliser pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (c) Répondre au problème posé puis vérifier votre solution.

III Activité d'introduction

Alice étudie la trajectoire d'une balle de tennis qu'elle a alors représenté sur un graphique. En abscisse la distance (en yards) séparant la balle de la ligne de fond de court et en ordonnée la hauteur de la balle (en yards) par rapport au sol.



Remarque : On a 1 yard = 91,4 cm. De plus un terrain de tennis mesure 26 yards de long et 9 yards de large. Le filet a pour une hauteur comprise entre 1 yard et 1.17 yard.

PARTIE A. **Etude graphique**

1. A quelle hauteur au maximum la balle se situe-t-elle par rapport au sol (en yard puis en cm) ?
2. La balle passe-t-elle au dessus du filet ?
3. La balle rebondit-elle avant la ligne de fond de court ?
4. Décrire les variations de la trajectoire de la balle de tennis.

PARTIE B. **Etude algébrique**

Bob a remarqué que la trajectoire précédente pouvait être modélisé par une fonction p définie pour x compris entre 0 et 25 par :

$$p(x) = \frac{-x^2 + 22x + 75}{30}$$

x est l'abscisse de la position de la balle (en yard) et $f(x)$ la hauteur de la balle (en yard) qui correspond à la position x.

1. Calculer $p(0)$. Est-ce cohérent avec le graphique ?
2. Vérifier par le calcul que la balle passe au dessus du filet.
3. Démontrer que pour x compris entre 0 et 25 on a :

$$p(x) = \frac{(x+3)(25-x)}{30}$$

4. Vérifier de deux manières différentes que la balle rebondit avant d'atteindre la ligne de fond de court.
5. Compléter le tableau des signes de la fonction p en utilisant la deuxième expression :

x	$-\infty \quad \cdots \quad \cdots \quad +\infty$
$x+3$	
$25-x$	
$(x+3)(25-x)$	
$p(x)$	