Une nouvelle fonction de référence - La fonction carré
Généralité sur les fonctions

Dans ce cours, on va étudier une nouvelle fonction qui n'est pas affine et qui est définie pour tout nombre réel par :

$$f(x) = x^2$$

I. Au sujet des variations et des symétries du « carré »

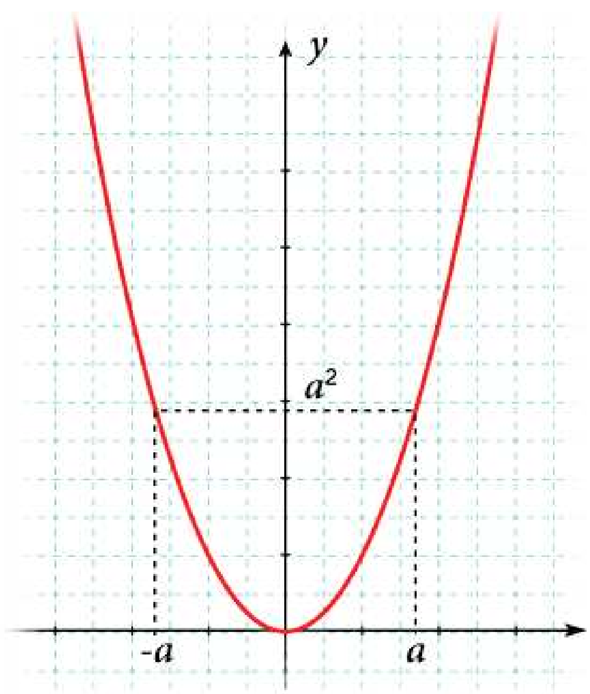
Complétons d'abord un tableau de valeurs pour comprendre mieux cette fonction :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

On constate deux choses :

— du fait que le carré d'un nombre (même d'un nombre négatif) est positif, il existe une symétrie dans les valeurs prises par cette fonction;

— dans un premier temps les valeurs de la fonction carré décroit, puis elle croit par la suite; autrement dit la fonction carré semble décroissante sur $]-\infty;0]$ et semble strictement croissante sur $[0;+\infty[$



Définition 1.

On dit qu'une fonction f est **paire** lorsque sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Cela arrive lorsque $f(-x) = f(x)$ comme c'est le cas pour la fonction carré.

Exercice 1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. On considère a et b sont positifs avec donc $a < b$.
   (a) Démontrer que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
   (b) Expliquer pourquoi $a^2 - b^2 < 0$.
   (c) En déduire que $0 \leq a^2 < b^2$.
   Que pouvez-vous en conclure sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les positifs ?
2.
3. On considère a et b sont négatifs avec toujours $a < b$.
   (a) Démontrer que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
   (b) Expliquer pourquoi $a^2 - b^2 > 0$.
   (c) En déduire que $a^2 > b^2 > 0$.
   Que pouvez-vous en conclure sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les négatifs ?
4. Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 < b^2$.
   Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 > b^2$.
   Peut-on en déduire une règle sur la comparaison des carrés de deux nombres de signe différent ?

Propriété 1 :

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

D'après le tableau de variations, la fonction carrée admet 0 comme minumum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Exemple :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $(2.3)^2$ et $(2.15)^2$: $2.3^2 > 2.15^2$ puisque $2.3 > 2.15$ et que la fonction carré est croissante sur les positifs.
2. $(-1.002)^2$ et $(-0.999)^2$: $(-1.002)^2 > (-0.999)^2$ puisque $-1.002 < -0.999$ et que la fonction carré est décroissante sur les négatifs.
3. π^2 et $(\pi-1)^2$: $\pi > \pi - 1 > 0$ donc puisque la fonction carré est croissante sur les positifs on a $\pi^2 > (\pi-1)^2$.
4. $(2-\sqrt{7})^2$ et $(2-\sqrt{5})^2$: $2-\sqrt{7} < 2-\sqrt{5} < 0$ alors comme la fonction carré est décroissante sur les négatifs il suit que $(2-\sqrt{7})^2 > (2-\sqrt{5}))^2$

II. La fonction carré est la fonction définie par $f(x) = \ldots\ldots$

La fonction carré ne possède ni quotient, ni racine, elle est définie sur ....

Propriété 2 : *Sens de variation et signe*

La fonction carrée inverse l'ordre sur les .... et .... sur les ....
Elle est donc strictement .... sur .... et strictement .... sur ....
On en déduit alors son signe sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Sens de f	
Signe de $f(x)$	

Remarques :

- La fonction carré admet comme minimum ... sur $\mathbb{R}$, atteint en ....
- La fonction étant positive sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice 1 **:**

Comparer les nombres suivants sans les calculer : 2.43^2 et 2.151^2 , puis $(-1.002)^2$ et $(-0.999)^2$.
2.43 et 2.151 sont tous deux positifs. Or la fonction carré est .... sur [......;......[, donc :

$$2.43 \ldots 2.151 \Longrightarrow 2.43^2 \ldots\ldots 2.151^2$$

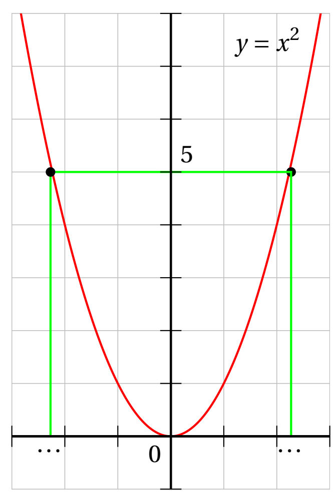
-1.002 et -0.999 sont tous deux .... Or ....
Donc :

$$-1.002 \ldots 0.999 \Longrightarrow (-1.002)^2 \ldots\ldots (-0.999)^2$$

Remarque : Si deux nombres réels sont de signes contraires, aucun résultat général ne permet de comparer immédiatement leurs carrés.

Définition 2 : *Propriété*

La courbe représentative de la fonction carré est appelée .... de sommet l'origine du repère.
Dans un repère orthogonal, elle est symétrique par rapport ....



Exercice 2 **:**

Grâce à la courbe de la fonction carré, résoudre les équations suivantes $x^2 < 5$ et $x^2 > 5$.
Dans le premier cas, on lit $\mathscr{S}$ = ...
Dans le second, on lit $\mathscr{S}$ = ...