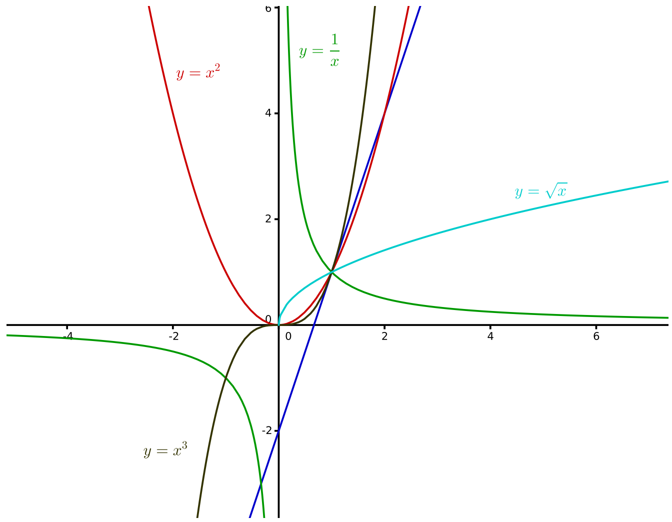
I. Principes généraux

Il existe de nombreux types de fonction, avec pour chacune un type de représentation graphique bien précis.
Prenons pour exemple les fonctions suivantes :

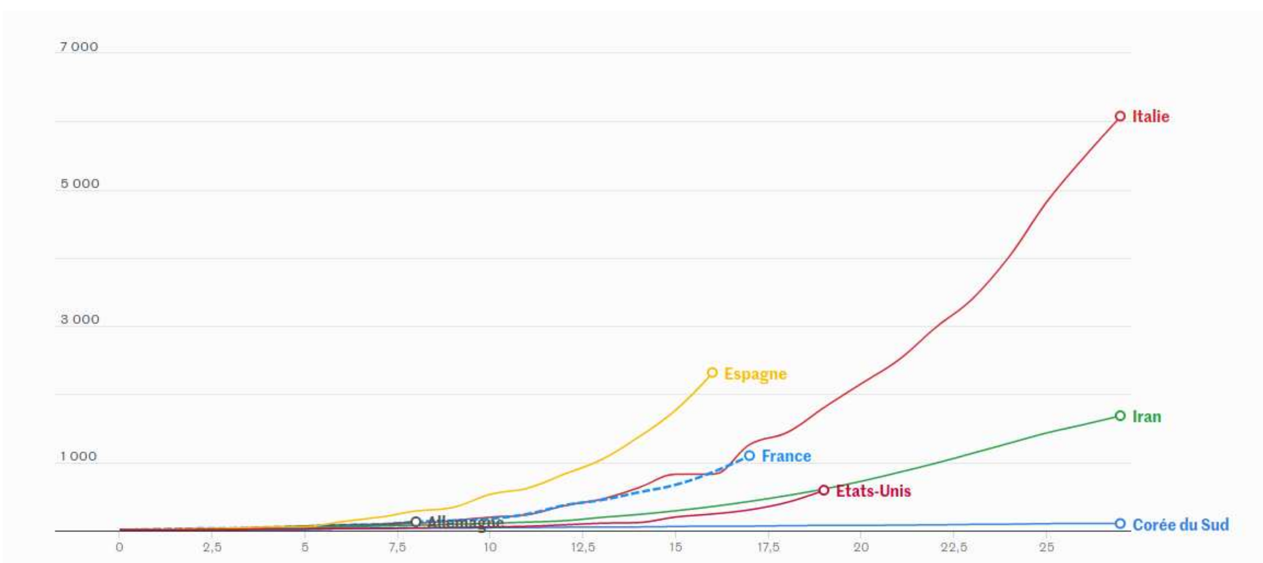
$$f_1(x) = 3x - 2 \quad ; \quad f_2(x) = x^2 \quad ; \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f_4(x) = x^3 \quad \text{et} \quad f_5(x) = \sqrt{x}$$

pour chacune correspond un graphique différent :



Et puis il existe énormément de phénomène qui suive un modèle définit par une fonction ou une courbe (ce qui revient au même).

Par exemple si on observe l'évolution du nombre de mort d au Covid19 (restons dans l'actualité) en fonction du nombre de jours de l'épidémie on observe ceci :



Si on connaissait la fonction dont la représentation graphique ressemble par exemple à l'évolution du nombre de mort en Italie on pourrait prévoir le futur et mesurer l'impact des différentes politiques sur l'évolution de ce nombre de mort.

Ce cas est un exemple « classique » de l'utilité des fonctions. De notre côté, constituons nous un **répertoire de fonction de référence** en commençant par les plus simples d'entre-elles : ***les fonctions affines***.

II. Les fonctions affines sont celles définies par $f(x) = ax + b$ avec a et b réels

Une fonction affine ne comporte ni quotient, ni racine. Son ensemble de définition est donc l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$.

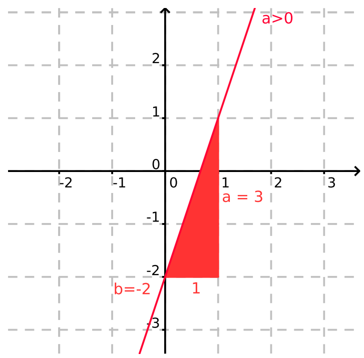
Propriété 1 : ***Définition***
La représentation graphique d'une fonction affine est la droite d'équation est $y = ax + b$.
a est appelé le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine

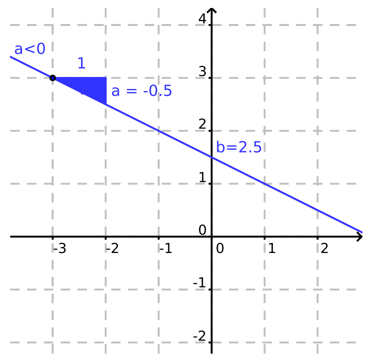
Exemples :

Les fonctions $f : x \mapsto 3x+2$, $g : x \mapsto -\pi x + \dfrac{2}{3}$, $h : x \mapsto x$ et $k : x \mapsto 3$ sont affines.

Les fonctions $l : x \mapsto 3x^2+2$ et $m : x \mapsto \dfrac{3}{x}+2$ ne le sont pas.

Lecture graphique du coefficient directeur





Remarques :

- Le coefficient directeur représente la pente de la droite d'équation $y = ax + b$.
  Plus précisément si on augmente l'abscisse x de 1 alors l'ordonnée y augmente (ou diminue) de a.
  Prouvons le :
  $$f(x) = ax + b \qquad \text{et} \qquad f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b = ax + b + a = f(x) + a$$
- La remarque précédente montre que si le coefficient directeur $a > 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ « monte » ; on dit que la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. C'est le cas de la droite « rouge » de l'exemple précédent.
  C'est encore le cas des fonctions suivantes $f_1(x) = 2x+5$ et $f_2(x) = 2x-5$ puisqu'elles ont 2 pour coefficient directeur.
  De même si le coefficient directeur $a < 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ « descend » ; on dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$. C'est le cas de la droite « bleu » de l'exemple précédent.
  C'est encore le cas des fonctions suivantes $f_1(x) = -2x+5$ et $f_2(x) = -2x-5$ puisqu'elles ont -2 pour coefficient directeur.
- L'ordonnée à l'origine est tout simplement l'ordonnée du point d'abscisse 0 d'où son nom.
- Lorsque qu'une fonction est négative sur un intervalle, sa courbe représentative est **sous** l'axe des abscisses sur cet intvervalle comme c'est le cas pour la fonction représentée par la droite rouge sur l'intervalle $\left]-\infty ; \dfrac{2}{3}\right]$.
- Lorsque qu'une fonction est positive sur un intervalle, sa courbe représentative est **au dessus** de l'axe des abscisses sur cet intervalle comme c'est le cas pour la fonction représentée par la droite rouge sur l'intervalle $\left[\dfrac{2}{3} ; +\infty\right[$.
- Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est une droite est une fonction affine.

Exercice 1 :

Trouver la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points $A(1;3)$ et $B(-2;-1)$.

Résolution :

f est une fonction affine ce qui équivaut à dire qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ puis sa représentation graphique passe par les points $A(1;5)$ et $B(-2;-1)$ donc on a $f(1) = 5$ et $f(-2) = -1$ d'où :

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=5 \\ f(-2)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\times 1+b=5 \\ -2a+b=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=5-a \\ -2a+(5-a)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=5-a \\ -3a=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \end{array}\right.$$

La fonction affine f vérifiant $f(1) = 5$ et $f(-2) = -1$ est définie par $f(x) = 2x + 3$.
Vérification : L'image de -2 par f est $f(-2) = 2\times(-2)+3 = -1$ et l'image de 1 est $f(1) = 2\times 1+3 = 5$.

Exercice 2 :

On considère la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 3$.
Dresser son tableau de signe sur $\mathbb{R}$ puis son tableau de variation, tracer ensuite dans un repère sa représentation graphique.

Résolution :

Pour dresser le tableau de signe de f il faut connaître les antécédents de 0 donc les valeurs de x telles que $f(x) = 0$ ce qui équivaut à

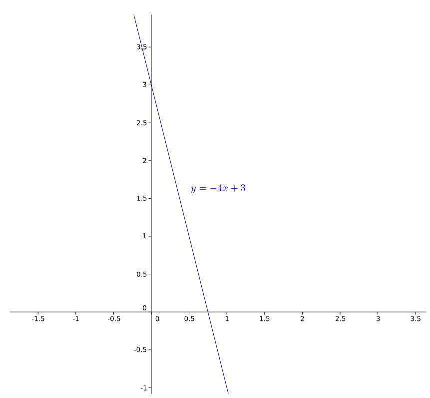
$$-4x+3=0 \Longleftrightarrow -4x=-3 \Longleftrightarrow x=\frac{-3}{-4}=0.75$$

Notation *: $\Longleftrightarrow$ signifie équivaut à.*
De plus comme le coefficient directeur de f est -4, f est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ autrement dit les valeurs de $f(x)$ diminuent lorsque les valeurs de x augmentent.
Nous avons donc :

x	$-\infty$		0.75		$+\infty$
$-4x+3$		$+$	0	$-$	

On l'a fait observé plus haut, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ on réalise alors le tableau suivant, puisque donc $a = -4 < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	



Exercice 3 :

On considère la droite d d'équation $y = 4x - 7$ et la droite d' d'équation $y = -5x + 2$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d et d'.

Résolution : *Le point d'intersection des droites d et d' a une ordonnée (y) qui vaut $-5x + 2$ puisqu'il est sur d et $4x - 7$ puisqu'il est sur d', ce qui va nous permettre de trouver son abscisse (x) en résolvant :*

$$4x-7=-5x+2 \Longleftrightarrow 4x+5x=2+7 \Longleftrightarrow 9x=9 \Longleftrightarrow x=1$$

Puisque son abscisse vaut 1 alors son ordonnée $y = -5\times 1+2 = -5+2 = -3$. Au final le point cherché a pour coordonnée $(1;-3)$