I. Appartenance d'un point à une droite

On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On se donne deux points A et B dont on connaît les coordonnées.
Tout point M appartient à la droite (AB) si et seulement si A, B et M sont alignés (c'est une platitude).
Poursuivons le « raisonnement », tout point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Autrement dit :

Théorème 1.

$M(x;y) \in (AB) \Longleftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0$.

Application : Dans un repère on sait que $A(3;5)$ et $B(1;2)$, déterminons une équation cartésienne de la droite (AB) c'est-à-dire une règle qui caractérisent les coordonnées des points de la droite (AB =.

$$M(x;y) \in (AB) \Longleftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0$$

Or, $\overrightarrow{AM}(x-3;y-5)$ et $\overrightarrow{AB}(1-3;2-5) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}(-2;-3)$
Enfin :

$$det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ y-5 & -3 \end{vmatrix} = -3(x-3)-2(y-5) = -3x-2y+19$$

Au final

$$M(x;y) \in (AB) \Longleftrightarrow -3x-2y+19=0 \Longleftrightarrow 3x+2y=19$$

Nous venons de trouver l'équation de la droite (AB) : $3x+2y=19$. Il est bien entendu possible d'isoler y dans le membre de gauche pour l'écrire sous sa forme réduite plus célèbre :

$$(AB) : y = -1.5x+8.5$$

Définition 1.

Tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelée **vecteur directeur** de la droite (AB).

Théorème 2.

Tout droite d admet une équation de la forme $ax+by=c$ où $\vec{u}(-b,a)$ est un vecteur directeur de la droite d.
Réciproquement, tout ensemble de points dont les coordonnées satisfont l'équation $ax+by=c$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$.