ೞ Travaux dirigées 1 ೞ
Raisonnements par récurrence

Exercice 1. On donne ci-dessous trois propositions vraies.

1. Pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$
2. Pour tout réel $x > 0$, $(x+1)^3 \geq 1+3x$
3. Pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$

Pour lesquelles peut-on envisager une démonstration par récurrence (que l'on ne fera pas) ?

Exercice 2. La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$

Exercice 3. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et pour tout n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Démontrer chacune des propositions suivantes.

1. La proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ »est héréditaire.
2. La proposition « $u_n \geq u_{n+1}$ »est héréditaire.
3. Si $u_0 = 1$ la suite u est croissante.
4. Si $u_0 = -2$, la suite u est décroissante.
5. Su $u_0 = -0.5$, la suite u est stationnaire.

Exercice 4.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont héréditaires
   (A) : « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » (B) : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 »
2. Sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

Exercice 5. On s'intéresse désormais à la somme S_n des cubes des n premiers entiers naturels impairs.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$S_n = 2n^4 - n^2$$
3. Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 41328$?

Exercice 6. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$2 \leq u_n \leq 3$$

Exercice 8. Montrer que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

Exercice 9. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'**inégalité de Bernoulli** est vraie :

$$\forall x > 0 \text{ , on a } (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 10.

1. Rappeler ce que signifie l'écriture $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$.
2. Compléter la propriété suivante, vu en première :

   Pour tous n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} =$
3. Ecrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
4. Démontrer que pour tous réels a et b on a
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
5. Quel lien observe-t-on entre les coefficients de développement et le triangle de Pascal ?
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a :
$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$
   formule appelée **formule du binôme de Newton**.
7. *Application* : développer $(a+b)^5$ sans calcul.

Exercice 11.
On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$
où $a \in [-1; +\infty[$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n) [1]

Exercice 12. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$

Et la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \dfrac{2^{n+1} - 2n - 3}{2^n}$

Exercice 13. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 14. Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\qquad u_n = 2^n$

Exercice 15. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f_n'(x) = nx^{n-1}$

Exercice 16. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$.

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$

1. On comparera les valeurs u_0 et u_1 suivant les valeurs de a.