∾ Correction du TG 1 ∾
Suites

Exercice 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$, pour tout entier naturel n.
Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 4 \times 3^n - 1$$

Solution

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : u_n = 4 \times 3^n - 1$$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
$4 \times 3^0 - 1 = 4 - 1 = 3$ et on a bien $u_0 = 3$ ce qui confirme bien que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n = 4 \times 3^n - 1$ alors $u_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} - 1$.
On sait que $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et on suppose que $u_n = 4 \times 3^n - 1$ on en déduit alors que :

$$u_{n+1} 3\left(4 \times 3^n - 1\right) + 2 = 4 \times 3^{n+1} - 3 + 2 = 4 \times 3^{n+1} - 1$$

autrement dit $\mathscr{P}$ est une propriété héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est héréditaire et est initialisée à partir de $n = 0$, on en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = 4 \times 3^n - 1$$

Exercice 2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$
Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 1 et est décroissante.

Solution

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propiété :

$$\mathscr{P}(n) : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
$u_1 = \sqrt{8+1} = 3$, on observe bien que $1 \leq 3 \leq 8 \Longleftrightarrow 1 \leq u_1 \leq u_0$ donc $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ alors $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
Posons $f(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \geq 1$, on a $f'(x) = \dfrac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ lorsque $x \geq 1$.
Nous en concluons que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ d'où l'on tire la série d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \\ \Longleftrightarrow & f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [1; +\infty[) \Longleftrightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

De plus $\sqrt{2} > 1$ d'où : $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$, autrement dit $\mathscr{P}$ est une propriété héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est héréditaire et est initialisée à partir de $n = 0$, on en déduit donc que (u_n) est une suite minorée et décroissante.

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$$

Solution

On a, pour $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{(4x-2)'(x+1)-(4x-2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{4(x+1)-(4x-2)}{(x+1)^2} = \frac{4x+4-4x+2}{((x+1)^2} = \frac{6}{(x+1)^2}$$

Trivialement $f'(x) > 0$ pour $x > -1$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n > 2$.

Solution

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : u_n > 2$$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
$u_0 = 3 > 2$ ce qui confirme bien que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n > 2$ alors $u_{n+1} > 2$.
On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$ puis que f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ et on suppose que $u_n > 2$ on en déduit alors que :

$$f(u_n) > f(2) \Longleftrightarrow u_{n+1} > 2$$

autrement dit $\mathscr{P}$ est une propriété héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est héréditaire et est initialisée à partir de $n = 0$, on en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = 4 \times 3^n - 1$$

3. La suite est-elle monotone ?

Solution

Calculons dans un premier temps $u_1 = f(u_0) = f(3) = \dfrac{10}{4} = 2,5$.

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : u_n > u_{n+1}$$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
$u_0 = 3 > 2,5 = u_1$ ce qui confirme bien que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n > u_{n+1}$ alors $u_{n+1} > u_{n+2}$.
On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$ puis que f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ mais aussi que $u_2 > 2$ et on suppose que $u_n > u_{n+1}$ on a alors que :

$$u_n > u_{n+1}(>2) \Longrightarrow f(u_n) > f(u_{n+1}) \Longrightarrow u_{n+1} > u_{n+2}$$

autrement dit $\mathscr{P}$ est une propriété héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est héréditaire et est initialisée à partir de $n = 0$, on en déduit donc que la suite (u_n) est monotone (elle est en particulier strictement décroissante).