Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

Correction de l'interrogation n°3

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. *10 points*

Dans le plan complexe, soit M_1 le point d'affixe $z = -1+\sqrt{3}i$.

1. (a) Calculer le module de z.

Solution

$z = -1+i\sqrt{3}$ donc

$$|z| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

(b) Calculer un argument de z.

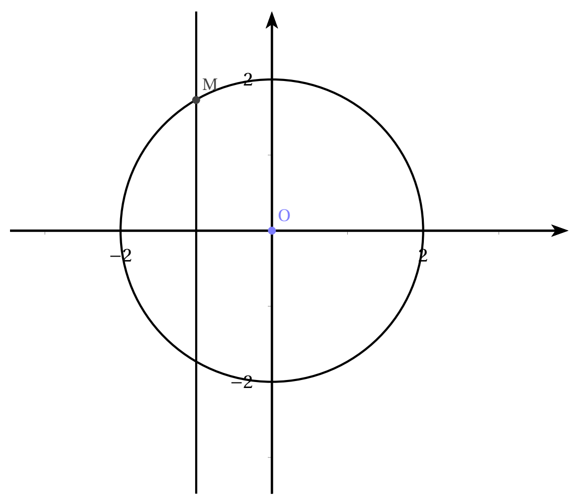
Solution

U n argument de z, disons θ, vérifie nécessaire $\cos\theta = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Placer, en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas, le point M dans le plan complexe (*en laissant apparaître les traits de construction.)*

Solution

On utilise le fait que le point M a pour abscisse -1 et pour module 2 :



2. On considère le point M_n avec $n \geq 1$ d'affixe $z_n = (-1+\sqrt{3}i)^n$

(a) Calculer puis placer z_2.

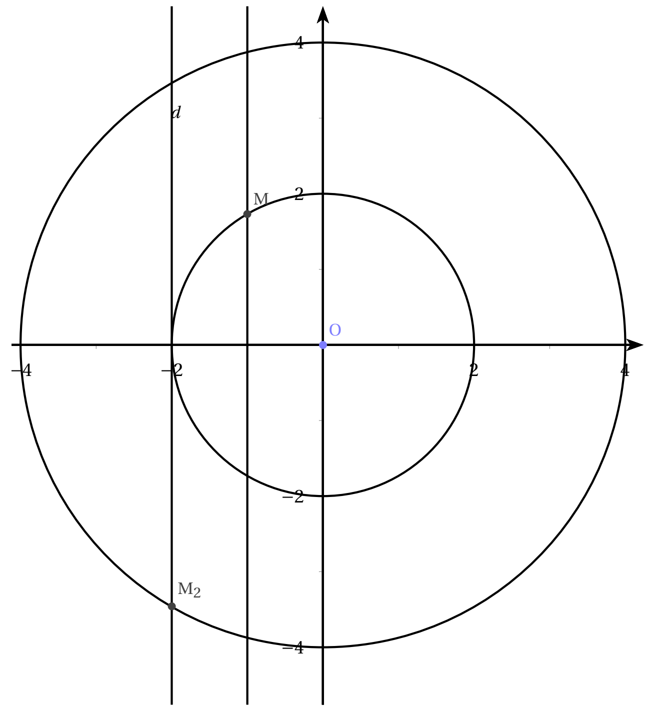
Solution

$z_2 = z_1^2$, donc $|z_2|^2 = |z_1^2| = |z_1|^2 = 2^2 = 4$ et $arg(z_2) = arg(z_1^2)+2k\pi$ donc

$$arg(é_2) = 2arg(z_1)+2k\pi = \frac{4\pi}{3}+2k\pi$$

d'où :

$$z_2 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2-2i\sqrt{3}$$



(b) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = |z_n|$, démontrer que :

$$u_n = 2^n$$

Solution

P our tout entier naturel n on a :

$$u_n = |z_n| = \left|(-1+i\sqrt{3})^n\right| = \left|-1+i\sqrt{3}\right|^n = 2^n$$

(c) Donner la limite de la suite (u_n)

Solution

P uisque $2 > 1$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$$

(d) Interprétrer géométriquement le résultat précédent.

Solution

$u_n = |z_n| = \mathrm{OM}_n$, la distance OM_n diverge donc vers $+\infty$.

Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. *10 points*

Dans le plan complexe, soit M_1 le point d'affixe $z = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

1. (a) Calculer le module de z.

Solution

$$z = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \text{ donc}$$

$$|z| = \sqrt{(1/4)^2 + (\sqrt{3}/4)^2} = \sqrt{1/16 + 3/16} = \frac{1}{2}$$

(b) Calculer un argument de z.

Solution

U n argument de z, disons θ, vérifie nécessaire $\cos\theta = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}/4}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Placer, en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas, le point M dans le plan complexe (*en laissant apparaître les traits de construction.)*

Solution

C f. question suivante.

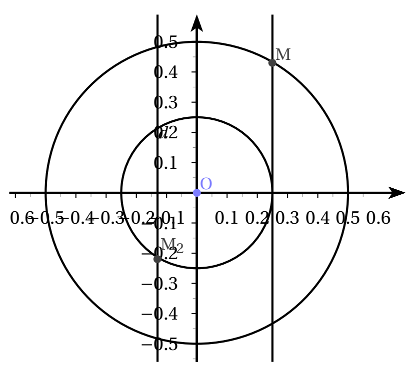
2. On considère le point M_n avec $n \geq 1$ d'affixe $z_n = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^n$

(a) Calculer puis placer z_2.

$z_2 = z_1^2$, donc $|z_2|^2 = |z_1^2| = |z_1|^2 = 0.5^2 = \frac{1}{4}$ et $arg(z_2) = arg(z_1^2) + 2k\pi$ donc $arg(z_2) = 2arg(z_1) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ d'où :

$$z_2 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Du module de z_1 et z_2 et de leurs arguments on place les points M et M_2 sans difficulté :



(b) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = |z_n|$, démontrer que :

$$u_n = 2^n$$

Solution

P our tout entier naturel n on a :

$$u_n = |z_n| = \left|(-1/4 + i\sqrt{3}/4)^n\right| = \left|-1/4 + i\sqrt{3}/4\right|^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(c) Donner la limite de la suite (u_n)

Solution

P uisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 0.5^n = 0$$

(d) Interprétrer géométriquement le résultat précédent.

Solution

$u_n = |z_n| = \mathrm{OM}_n$, la distance OM_n converge vers 0 et donc le point M_n se rapproche inexoblarement de l'origine du repère lorsque n tends vers $+\infty$.