Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°2

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + n^2 + 1$

1. Démontrer, par récurrence, que $u_n \geq n^2$

Solution

N otons $\mathscr{P}(n) : u_n \geq 2$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0
De fait $u_0 = 0 \geq 0^2 = 0$.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n \geq n^2$ alors $u_{n+1} \geq (n+1)^2$
Si $u_n \geq n^2$ comme $u_{n+1} = 2u_n + n^2 + 1$ on a $u_{n+1} \geq 3n^2 + 1$
De plus $3n^2 + 1 \geq (n+1)^2 \Longleftrightarrow 2n^2 - 2n \geq 0 \Longleftrightarrow 2n(n-1) \geq 0$
De sorte que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on ait $2n(n-1) \geq 0$ puis pour $n = 1$ et pour $n = 0$ on a $2n(n-1) = 0$, ainsi on a pour tout entier naturel n établit que $3n^2 + 1 \geq (n+1)^2$ et donc que $u_{n+1} \geq (n+1)^2$.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq n^2$

2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} n^2$ puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Solution

P uisque $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et puisque $u_n \geq n^2$ on a par comparaison :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 2. (6 points)

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2 + 2}{2v_n}$$

1. (a) Soit f la fonction définie sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

Déterminer le tableau de variation de f sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

On a pour tout nombre réel $xx \geq \sqrt{2}$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x) - 2(x^2 + 2)}{(2x)^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 4}{4x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

De plus si $x \geq \sqrt{2}$ alors $2x > 0$ et $x^2 - 2 \geq 0$ donc le quotient est positif i.e on a $f'(x) \geq 0$ sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

(b) Démontrer ,par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $\sqrt{2} \leq v_{n+1} \leq v_n$

Solution

N otons $\mathscr{P}(n) : \sqrt{2} \leq v_{n+1} \leq v_n$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0
De fait $v_1 = f(v_0) = \dfrac{2^2 + 2}{4} = 1,5$ et $v_0 = 2$, donc on a bien $\sqrt{2} < v_1 < v_0$

— ***Hérédité*** : Montrons que si $\sqrt{2} \leq v_{n+1} \leq v_n$ alors $\sqrt{2} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$
Comme $\sqrt{2} \leq v_{n+1} \leq v_n$ et comme f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ on a :

$$f\left(\sqrt{2}\right) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1})$$

et donc :

$$\frac{2+2}{2\sqrt{2}} \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \Longleftrightarrow \sqrt{2} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$$

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n la suite (v_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.

(c) En déduire que la suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ.

Solution

C omme (v_n) est décroissante et minorée (ici par $\sqrt{2}$) alors elle converge vers un réel qui est ici supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.

2. (a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x = \frac{x^2+2}{2x}$

On pour $x \neq 0$:

$$x = \frac{x^2+2}{2x} \Longleftrightarrow 2x^2 = x^2 + 2 \Longleftrightarrow x^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

(b) Déterminer la limite ℓ de la suite (v_n).

Solution

O n sait que (v_n) converge, disons que v_n converge vers ℓ. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n^2+2}{2v_n} = \frac{\ell^2+2}{2\ell}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ d'où on tire le fait que ℓ est solution de l'équation

$$\ell = \frac{\ell^2+2}{2\ell}$$

Ainsi $\ell = \pm\sqrt{2}$ mais puisque (v_n) est minorée par $\sqrt{2}$ alors (v_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°2

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$

1. Déterminer la limite des suites suivantes :

$$v_n = \frac{2n-1}{n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{2n+1}{n}$$

Solution

$v_n = \frac{n(2-1/n)}{n} = 2 - \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$, de même on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution

D u fait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ on tire que $v_n \leq u_n \leq w_n$ et du théorème des gendarmes on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

Exercice 2. (6 points)

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2v_n+3}{v_n+4}$$

1. (a) S oit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$$

Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$.

Pour $f \neq -4$ on a :

$$f'(x) = \frac{2(x+4)-(2x+3)}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2}$$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

(b) Démontrer ,par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 1$.

Solution

N otons $\mathscr{P}(n) : 0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 1$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0

De fait $v_1 = f(v_0) = \frac{2\times 0+3}{0+4} = 0{,}75$ et $v_0 = 0$, donc on a bien $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq 1$

— ***Hérédité*** : Montrons que si $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 1$ alors $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 1$ Comme $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 1$ et comme f est strictement croissante sur $[0;1]$ on a :

$$f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(1)$$

et donc :

$$\frac{3}{4} \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 1$$

ce qui est mieux que ce nous souhaitions démontrer donc $\mathscr{P}$ est héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n la suite (v_n) est croissante et bornée entre 0 et 1

(c) En déduire que la suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ.

Solution

C omme (v_n) est croissante et majorée par 1 alors elle converge vers un réel qui est inférieur ou éventuellement égal à 1.

2. (a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x = \frac{2x+3}{x+4}$

Solution

O n a, bien entendu pour $x \neq -4$:

$$x = \frac{2x+3}{x+4} \Longleftrightarrow x(x+4) = 2x+3 \Longleftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$\Delta = 4 + 12 = 16$ de sorte que l'équation admet deux solutions que voici :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$$

(b) Déterminer la limite ℓ de la suite (v_n).

Solution

O n sait que (v_n) converge, disons que v_n converge vers ℓ. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2v_n+3}{v_n+4} = \frac{2\ell+3}{\ell+4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ d'où on tire le fait que ℓ est solution de l'équation

$$\ell = \frac{2\ell+3}{\ell+4}$$

Ainsi $\ell = -3$ ou 1 mais puisque (v_n) est minorée par 0 alors (v_n) converge vers 1.