∽ CORRECTION DU DEVOIR MAISON 7 ∾
LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

On considère le nombre complexe $z = -1 + \sqrt{3}i$; on note M_n le point du plan d'affixe z^n.

1. M_{2017} est-il sur l'axe des réels ?

Solution

M_{2017} est un sur l'axe des réels si et seulement si z^{2017} est un nombre réel si et seulement si $arg(z^{2017} = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Or $arg(z^{2017} = 2017arg(z)$ et $z = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Donc $arg(z^{2017} = 2017 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4034\pi}{3} = \frac{3 \times 1347\pi + 2\pi}{3} = 1347\pi + \frac{2\pi}{3} = 673 \times 2\pi + \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 673 \times 2\pi$

Bref un argument de z^{2017} est $\frac{4\pi}{3}$ ce qui assure le fait que M_{2017} n'est pas sur l'axe des réels.

2. M_{2017} est-il sur l'axe des imaginaires ?

Solution

I l faudrait, pour cela, qu'un argument de z^{2017} soit égal à $\frac{\pi}{2}$ du moins à π près ce qui n'est pas le cas compte tenu de la question précédente.

3. Quelles sont l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles M_n est un point de l'axe des réels ?

Solution

M_n est sur l'axe des réels si et seulement si $arg(z^n) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ce qui équivaut à

$$narg(z) = k\pi \iff n \times \frac{2\pi}{3} = k\pi \iff \frac{2}{3}n = k \iff n = \frac{3}{2}k = 1,5k$$

Or, n et k sont des nombres entiers et $1,5k$ n'est entier que lorsque k est un multiple de 2 donc n est de la forme $n = 3k'$ (où $k = 2k'$) donc M_0, M_3, M_6, M_9, M_{12}, etc..sont sur l'axe des réels.

4. On note $r_n = OM_n$.

   (a) Exprimer r_n en fonction de n.

Solution

$$r_n = OM_n = |z^n| = |z|^n = 2^n$$

   (b) Déterminer la limite de (r_n) en fonction de n.

Solution

P uisque $2 > 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} r_n = +\infty$$

Exercice 2. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.

Solution

$$f(-1+i\sqrt{3}) = (-1+i\sqrt{3})^2 + 2(-1+i\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.

Solution

$$f(z) = 5 \Longleftrightarrow z^2 + 2z + 9 = 5 \Longleftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -12$$

donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées qui sont :

$$\frac{-2 \pm i\sqrt{12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Écrire sous forme trigonométrique les solutions de cette équation.

Solution
On a :

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$$

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

Solution

$$f(z) = \lambda \Longleftrightarrow z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$$

L'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si et seulement si son discriminant est strictement négatif c'est-à-dire :

$$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) < 0 \Longleftrightarrow 4 < 36 - 4\lambda \Longleftrightarrow 4\lambda < 32 \Longleftrightarrow \lambda < 8$$

L'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si et seulement si $\lambda < 8$.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Solution

Nous souhaitons donc démontrer que M vérifie une relation du type $\Omega M = \sqrt{3}$.

$$|f(z)-8| = 3 \iff |z^2+2z+9-8| = 3 \iff |z^2+2z+1| = 3 \iff |(z+1)^2| = 3 \iff |z+1|^2 = 3 \iff |z+1| = \sqrt{3} \iff |z-(1)| = \sqrt{3}$$

En notant $z_\Omega = -1$ on obtient $|z-(-1)| = \sqrt{3} \iff \Omega M = \sqrt{3}$

Tracer (F) sur le graphique.