CORRECTION DEVOIR MAISON 5
LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - \mathrm{i}, \quad b = 1 - 3\mathrm{i} \text{ et } c = -1 - \mathrm{i}.$$

1. (a) Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   (b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

Solution

$$\mathrm{AB} = |b-a| = |1-3\mathrm{i}-(3-i)| = |1-3i-3+i| = |-2-2i| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2)} = \sqrt{8}$$
$$\mathrm{BC} = |c-b| = |-1-i-1+3i| = |-2+2i| = \sqrt{8}$$
$$\mathrm{AC} = |c-a| = |-1-i-3+i| = |-4| = 4$$

De sorte que le triangle ABC est isocèle en B.
De plus puisque $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2$ le triangle ABC est aussi rectangle en B.

   (c) Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
   $\mathrm{OA} = |a| = \sqrt{10}$ et $\mathrm{OB} = |b| = \sqrt{10}$ donc A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O et de rayon $\sqrt{10}$

2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, définit par $n = 1 + 3i + (1-i)m$.
   (a) Calculer les distances AM, AN et MN.

Solution

En notant $m = x + iy$ où x et y sont des nombres **réels** on a :

$$\mathrm{AM} = |m-a| = |x+iy-3+i| = |x-3+i(y+1)| = \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$$

$$\mathrm{AN} = |n-a| = |1+3i+(1-i)(x+iy)-3+i| = |1+3i+x+iy-ix+y-3+i| = |-2+x+y+i(y-x+4)|$$

donc

$$\mathrm{AN} = \sqrt{(-2+x+y)^2+(y-x+4)^2} = \sqrt{(x-3+y+1)^2+(y+1-(x-3))^2} = \sqrt{2(x-3)^2+2(y+1)^2+2(x-3)(y+1)-2(x-3)(y+1}$$

puis :

$$\mathrm{AN} = \sqrt{2(x-3)^2+2(y+1)^2}$$

$$\mathrm{MN} = |m-n| = |m-1-3i-m+im| = |-1-3i+i(x+iy)| = |-1-3i+ix-y| = |-1-y+i(x-3)|$$

donc

$$\mathrm{MN} = \sqrt{(-1-y)^2+(x-3)^2} = \sqrt{(1+y)^2+(x-3)^2} = \mathrm{AM}$$

   (b) En déduire la nature du triangle AMN.
   AM = MN donc le triangle AMN est isocèle en M.
   De plus $\mathrm{AN}^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{MN}^2$ donc le triangle AMN est rectangle en M.

3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe.
   Montrer que : $q = \dfrac{(1-\mathrm{i})m}{2} + 2 + \mathrm{i}$.

Solution

Puisque Q est le milieu de [AN] on a $q = \dfrac{a+n}{2} = \dfrac{3-i+1+3i+(1-i)m}{2} = \dfrac{4+2i+(1-i)m}{2} = 2+i+\dfrac{(1-i)m}{2}$

Exercice 2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$). À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M′ est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

Solution

$\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4$ donc le trinôme $-z^2 + 2z - 2$ admet deux racines complexes conjugués qui sont $z = \dfrac{-2 + i\sqrt{4}}{-2} = 1 - i$ et donc $\overline{z} = 1 + i$.

Les affixes z des points dont l'image $z' = 2$ satisfont l'équation $-z^2 + 2z = 2 \Longleftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0$, par conséquent il existe deux tels points dont les affixes sont $1 - i$ et $1 + i$.

2. Soit M un point d'affixe z et M′ son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
Montrer que M est le milieu du segment [NM′].

Solution

L e milieu du segment [NM′] a pour affixe $\dfrac{z^2 + z'}{2} = \dfrac{z^2 - z^2 + 2z}{2} = z$, ce qui prouve bien que M est le milieu du segment [NM′].

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.

(a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.

Solution

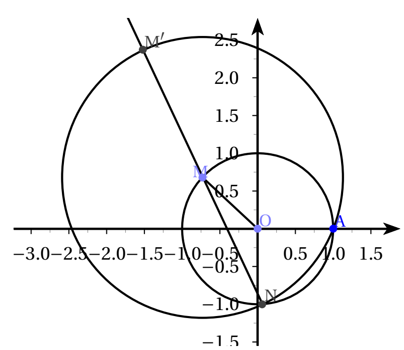
$|z| = OM = 1$ puisque $M \in \mathscr{C}$, de plus $|z_N| = |z^2| = |z|^2 = 1^2 = 1$.

Enfin $arg(z_n) = arg(z^2) + 2k\pi = 2arg(z) + 2k\pi = 2\theta + 2k\pi$ où k désigne un entier relatif.

(b) Sur une figure construire les points N et M′ en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

Solution

E n partant d'un point M placé n'importe où sur le cercle trigonométrique, on trouve le point N en duplicant l'argument de M et le point M′ en exploitant le fait que M soit le milieu du segment [NM′].



(c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM′ ?

Solution

M est le milieu du segment [NM′] donc les points N et M′ appartiennent tout deux au cercle de centre M et de rayon MN, de plus [NM′] est un diamètre de ce cercle.

Puisque, d'une part M, A et N sont trois points du cercle trigonométrique et d'autre part $\widehat{\text{AOM}} = \widehat{\text{MON}}$, on en déduit que MN = AM, de sorte que A est aussi un point du cercle de centre M et de rayon MN, donc le triangle AMM$'$ est isocèle en M.