∾ CORRECTION DEVOIR MAISON 4 ∾
LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_\mathrm{A} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

Solution

O n a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = z_{n+1} - z_\mathrm{A}$$
$$\Longrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 - z_\mathrm{A} \Longrightarrow u_{n+1} \quad = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times (u_n + z_\mathrm{A}) + 5 - (4+2i) \quad \text{car } u_n = z_n - z_\mathrm{A} \Longleftrightarrow z_n = u_n + z_\mathrm{A}$$
$$\Longrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}i\,u_n + \frac{1}{2}i(4+2i) + 5 - 4 - 2i$$
$$\Longrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}i\,u_n + 2i - 1 + 1 - 2i$$
$$\Longrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}i\,u_n$$

(b) Démontrer (par récurrence) que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i}).$$

Solution

Notons $\mathscr{P}(n) : u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i)$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$:

D'une part $\left(\frac{1}{2}i\right)^0 (4-2i) = -4-2i$ et d'autre $u_0 = z_0 - z_\mathrm{A} = 0 - z_\mathrm{A} = -(4+2i) = -4-2i$

On vient de vérifier la validité de $\mathscr{P}$ au rang 0.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i)$ alors $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} (-4-2i)$

On sait que $u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$ et on suppose que $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i)$, par conséquent :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i) = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} (-4-2i)$$

donc $\mathscr{P}$ est une proposition héréditaire .

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire ce qui prouve par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i}).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Solution

A , M_n et M_{n+4} sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}_n}$ et AM_{n+4} sont colinéaires.

Demontrons pour cela qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM_{n+4}} = k\overrightarrow{AM_n}$, c'est à dire que $z_{\overrightarrow{AM_{n+4}}} = kz_{\overrightarrow{AM_n}}$

On a

$$z_{\overrightarrow{AM_{n+4}}} = z_{M_{n+4}} - z_A = z_{n+4} - z_A = u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4}(-4-2i) = \left(\frac{1}{2}i\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i) = \frac{1}{16}u_n = \frac{1}{16}(z_n - z_A) = \frac{1}{16}z_{\overrightarrow{AM_n}}$$

Indication : On pourra vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AM_n}$ et $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ sont colinéraires (en utilisant leurs coordonnées)

Exercice 2.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

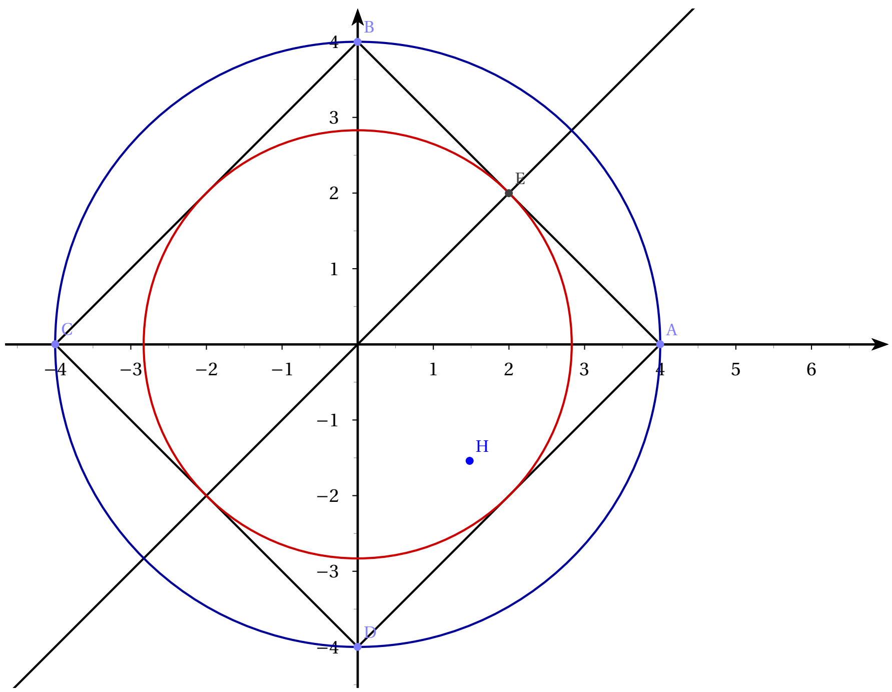
1. Démontrer que $OM_n = \sqrt{2}^n$ pour tout entier naturel n.

Solution

$$OM_n = |z^n| = |z|^n = |1+i|^n = \sqrt{1^2+1^2}^n = \sqrt{2}^n$$

2. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que le point M_n se situe en dehors du carré ABCD pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

On vérifie que $OM_1 = \sqrt{2}$, $OM_2 = 2$ et $OM_3 = 2\sqrt{2}$



Tout point contenu dans le cercle de centre O et de rayon OE est aussi contenu dans le carré ABCD, or E est le point d'intersection entre la droite d'équation $y = x$ et la droite AB qui a pour équation $y = 4 - x$ de sorte que l'abscisse x de E vérifie $x = 4 - x \Longleftrightarrow x = 2$, donc $E(2,2)$.

La distance $OE = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, ainsi M_1, M_2 et M_3 sont dans le carré ABCD.

De plus $OM_4 = \sqrt{2}^4 = 4$, puisque la suite $(\sqrt{2}^n)$ est croissante (en effet $\sqrt{2}^{n+1} - \sqrt{2}^n = \sqrt{2}^n(\sqrt{2}-1) > 0$, il suit que pour tout entier naturel $n > 4$ on a $OM_n > 4$. Tout point qui se situe en dehors du cercle de centre O et de rayon 4 est aussi situé à l'extérieur du carré ABCD, ainsi dès que $n \geq 5$ on est sûr que M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

En ce qui concerne M_4, calculons son affixe :

$$(1+i)^4 = (1+i)^2(1+i)^2 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = -4$$

Ainsi M_4 est le point D et il est sur le carré ABCD.

Le plus entier n_0 qui convient est donc $n_0 = 5$.