∽ Travaux dirigées 2 ∾
Suites

Exercice 1. On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3} \qquad \text{et} \qquad v_n = -(n+1)^2$$

1. (a) Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   (b) On considère l'algorithme suivant :

   Algorithme 1 :

   Données: u est un nombre réel.
   n est un entier naturel.
   $n = 0$ et $u = \dfrac{1}{3}$.
   Tant que $(|u-2| \geq 0,001)$ **Faire**
   $\quad n := n+1$ et $u := \dfrac{2n+1}{n+3}$
   Fin Tant que
   Afficher n

   Quel est l'intérêt de cet algorithme ?
   (c) A partir de quel rang N la distance entre u_n et ℓ est-elle strictement inférieure à $0,001$?
2. (a) Déterminer la limite de la suite v.
   (b) Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n < -10^{10}$.

Exercice 2. La suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n+3}{u_n+6} \end{cases}$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$ on a : $1 < u_n < 3$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Quelle est la limite de (v_n) ?
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n. En déduire le comportement à l'infini de u_n

Exercice 3. Déterminer la limite des suites u, v et w définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad ; \quad v_n = \frac{n+\cos n}{n+3} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n+5}$$

Exercice 4.
On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

où $a \in [-1;+\infty[$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n) [1]

1. On comparera les valeurs u_0 et u_1 suivant les valeurs de a.

Exercice 5. Soit (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2\sqrt{v_n} + 1 \end{cases}$$

Démontrer que (v_n) est bornée par 0 et 9

Exercice 6. On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{5}{n+1}$ et $v_n = n^2 + n$

1. (a) Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   (b) Compléter l'algorithme suivant de manière à ce qu'il affiche le plus petit entier naturel n tel que la distance entre u_n et ℓ soit inférieure à 10^{-5} :

Algorithme 2 :

Données: u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
$n = 0$ et $u = \ldots$.
Tant que $(\ldots\ldots\ldots)$ **Faire**
    $\ldots\ldots\ldots$ et $\ldots\ldots\ldots\ldots$
Fin Tant que
Afficher …

2. (a) Déterminer la limite de la suite v.
   (b) Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 10^{10}$.

Exercice 7. *Etude d'une suite arithmético-géométrique*

1. Chaque année, la grand mère de Julien dépose de l'argent dans une tirelire pour son petit fils.
   Elle a commencé le 1^{er} janvier 1982 par un dépot de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépot chaque 1^{er} janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépot de 50 F. On note :
   — u_n, le montant exprimé en francs, de la somme déposé dans la tirelire le 1^{er} janvier de l'année $1982 + n$
   (Ainsi : $u_0 = 500$, $u_1 = 550$, …)
   — s_n le montant exprimé en francs, de la somme déposé dans la tirelire après le dépot de l'année $1982 + n$
   (Ainsi : $s_0 = 500$, $s_1 = 1050$, …)
   (a) Calculer u_2, puis exprimer u_n en fonction de n
   (b) Calculer s_2, puis exprimer s_n en fonction de n
   (c) Le 1^{er} janvier 2002, la grand-mère de Julien effectué son dépôt habituel (en francs) puis offre la tirelire à Julien. Quel est le montant de la somme reçue par Julien en francs, puis en euros[2]
2. Avec le cadeau de sa grand-mère, Julien décide d'ouvrir un compte bancaire et décide d'y placer la plus grande partie de la somme reçue.
   Le 1^{er} janvier 2002, il effectue un placement de 3000€ au taux annuel de 4%.
   De plus chaque 1^{er} janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200€, on note :
   — c_n le montant exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Julien après n années de placement. (Ainsi $c_0 = 3000$)
   — (u_n) la suite définie par $u_n = c_n + 5000$. (Ainsi $u_0 = 8000$).
   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n on a $c_{n+1} = 1,04c_n + 200$.
   (b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) Exprimer u_n en fonction de n, puis c_n en fonction de n.
   (d) Combien d'années, au minimum, Julien devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 6000€ sur son compte bancaire ?

2. Rappel : 1 euro correspond à 6,55957 francs