∾ DEVOIR MAISON 7 ∾
LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

On considère le nombre complexe $z = -1 + \sqrt{3}i$; on note M_n le point du plan d'affixe z^n.

1. M_{2017} est-il sur l'axe des réels ?
2. M_{2017} est-il sur l'axe des imaginaires ?
3. Quelles sont l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles M_n est un point de l'axe des réels ?
4. On note $r_n = \mathrm{OM}_n$.
   (a) Exprimer r_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de (r_n) en fonction de n.

Exercice 2. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme trigonométrique les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1 ; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.