ᔕ Devoir Maison 6 ᔓ
Les nombres complexes

Exercice 1. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$, démontrer que j est solution de l'équation :

$$1 + j + j^2 = 0$$

Exercice 2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

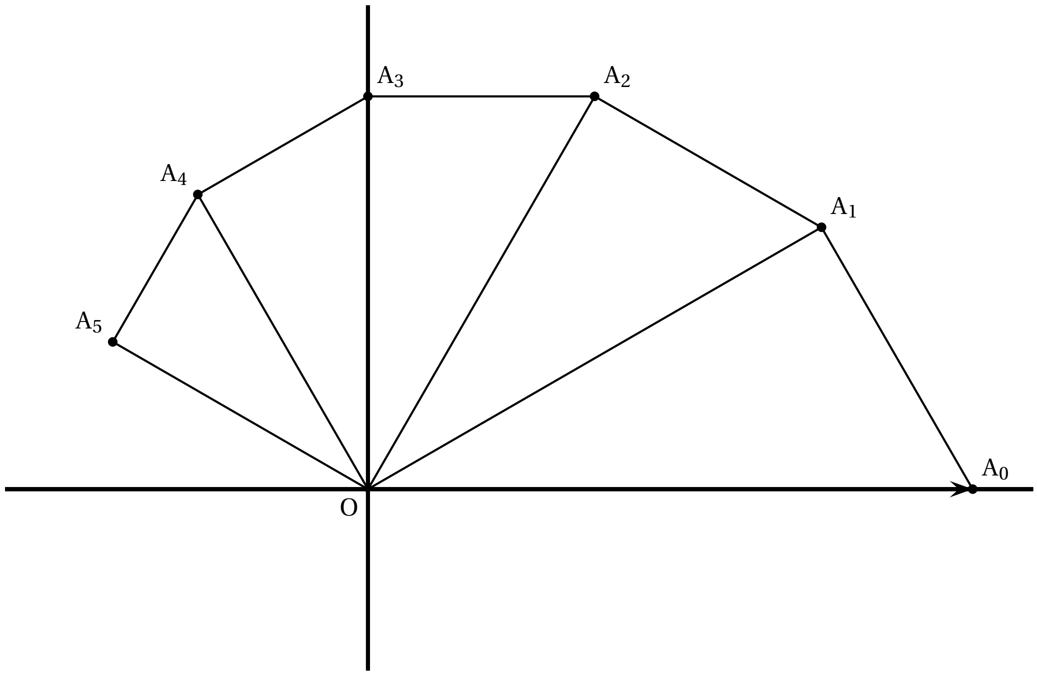
1. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.
2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   (b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
   (c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que R > P
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$R
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

   (a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?
   (b) Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?
4. (a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
   (b) On admet que $z_n = r_n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
   (c) Compléter la figure ci-dessous, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
   Les traits de construction seront apparents.


A3
A2
A4
A1
A5
A0
O