∾ DEVOIR MAISON 3 ∾
SUITES

Remarque : *L'élève pourra traiter, au choix, le premier exercice ou les deux derniers.*

Exercice 1.

On suppose que, sur une période donnée, la population d'une pays est constante et égale à 60 millions d'habitants, dont 40 millions vivent en zone rurale et 20 millions vivent en ville.

On constate que les mouvements de population sont décrits par la règle suivante : chaque année, 20% des ruraux émigrent à la ville et 10% des citadins émigrent en zone rurale.

On note respectivement V_n et R_n les effectifs (en millions) des citadins et des ruraux au bout de n années ($V_0 = 20$ et $R_0 = 40$).

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{cases} V_{n+1} &= 0,9V_n + 0,2R_n \\ R_{n+1} &= 0,1V_n + 0,8R_n \end{cases}$$

2. Que vaut $V_n + R_n$?
3. En déduire que les suites (V_n) et (R_n) satisfont à :

$$V_{n+1} = 0,7V_n + 12 \qquad \text{et} \qquad R_{n+1} = 0,7R_n + 6$$

4. Démontrer que (V_n) est suite croissante et majorée par 60 puis que (R_n) est une suite décroissante et minorée par 0.
5. En déduire que les suites (V_n) et (R_n) convergent.
6. Déterminer les limites des suites (V_n) et (R_n). Que peut-on en déduire dans le contexte de l'exercice ?

Exercice 2.

Montrer par récurrence que :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$