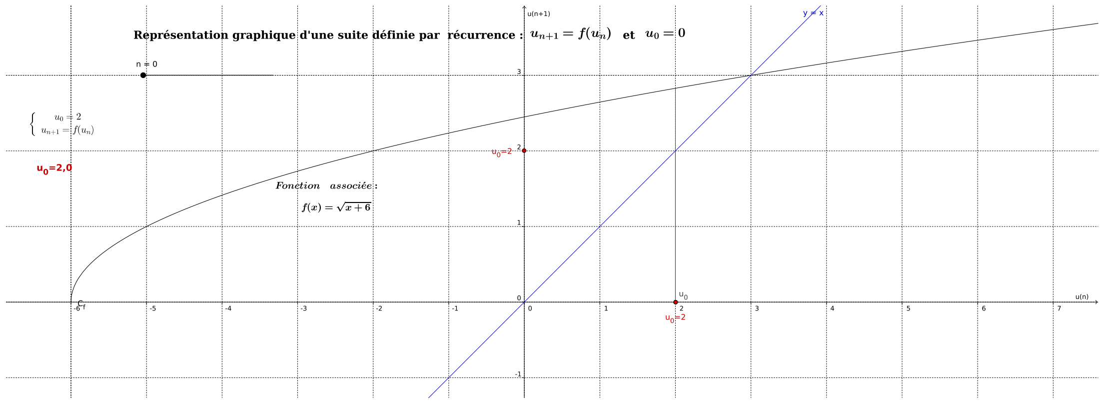
∾ Devoir Maison 1 ∾
Suites

Exercice 1.

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Dans un repère orthonormal on représenté la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie pour $x \geq -6$ par $f(x) = \sqrt{x+6}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. Représenter les termes u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4 en utilisant $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.



   Conjecturer, à l'aide du « dessin » précédent le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

2. Démontrer, par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Résoudre l'équation $x = \sqrt{x+6}$.
5. En vous aidant du graphique, expliquer pourquoi résoudre l'équation précédente a un lien avec la limite de la suite (u_n).

Exercice 2. On considère la suite de terme général :

$$u_n = 2^n - n$$

1. Calculer u_0 ; u_1 ; u_2 ; … ; u_9 puis conjecturer d'une part le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$$

   (b) Démontrer, par récurrence que $2^n - 1 \geq 0$ pour tout entier naturel n.
   On pourra observer que $2^{n+1} - 1 = 2 \times \left(2^n - 1\right) + 1$

   (c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. (a) Démontrer par récurrence que $u_n \geq 1,5^n$ pour $n \geq 3$.

   (b) Donner

$$\lim_{n \to +\infty} 1,5^n$$

   (c) Que peut-on en déduire quant à la limite de la suite (u_n) ?