Exercices
Quelle est la probabilité d'avoir son bac ??

Exercice 1 : Dans lequel des cas suivants X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner les paramètres de la loi et calculer $P(X = 3)$ si c'est possible, puis l'espérance et la variance de X.

1. Dans une classe, on tire au sort sans remise 5 élèves, X est le nombre d'élèves abonnés à Star'Ac mag dans le lot tiré au sort.
2. Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.
3. On lance 10 dés, X est le nombre de 5 obtenus.
4. Un circuit comprend 2 lampes en série. Pour chacune d'elle, la probabilité qu'elle fonctionne est de 0.03. X est le nombres de lampes qui s'allument lorsqu'on appuie sur l'interrupteur.
   Même question avec cette fois des lampes en parallèles.

Exercice 2 : Dans le métro, il a 9% des voyageurs qui fraudent. Chaque jour à la station Alésia, on contrôle 200 personnes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraudeurs sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale (malgré le fait qu'il n'y ait pas de remise, le nombre de personnes étant très important, on admet qu'il y a indépendance entre les personnes contrôlées).

1. Déterminer les paramètres de la loi de X.
2. Combien de personnes en moyenne vont être signalées en fraude lors de ce contrôle ?
3. Si le prix du ticket est de 1,70€, quel doit être le prix de l'amende pour qu'en moyenne, l'établissement régissant le métro ne perde pas d'argent avec les fraudeurs de la station Alésian, sachant qu'il y a 5000 voyageurs chaque jour dans cette station ?

Exercice 3 : Un test comporte 10 questions. Chaque question contient 4 réponses possibles, dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à toutes les questions.

1. Quelle est la probabilité que le candidat ait bien répondu à la première question ?
2. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses du candidat à ce test. Quelle loi suit X ?
3. Combien de bonnes réponses en moyenne obtient le candidat ?
4. A chaque bonne réponse, l'examinateur ajoute 2 points ; à chaque mauvaise réponse, il ne retire pas de point.
   Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre totale de points lors de ce test.
   a. Exprimer Y en fonction de X.
   b. En déduire E(Y).
   c. Le candidat a-t-il intérêt à répondre au hasard ?
5. L'examinateur change le barême. A chaque bonne réponse il ajoute 2 points, à chaque mauvaise, il retire 1 point.
   Soit Z la variable aléatoire représentant le nombre total de points lors de ce test.
   a. Exprimer Z en fonction de X.
   b. En déduire E(Z).
   c. Le candidat a-t-il intérêt à répondre au hasard ?

Exercice 4 :

1. Que fait cet algorithme ? Expliquer.
2. Programmer cet algorithme sur une calculatrice.
3. Déterminer, pour un seuil de 0.95, les intervalles de fluctuation d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0.3$. Interpréter.
4. Au seuil de 90% ? Interpréter.
5. Reprendre les deux questions précédentes pour $n = 300$ et $p = 0.02$.

Algorithme 1 : *Fluctu*

Entrée(s) : $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq p \leq 1$ et $s \in [0;1]$

Variable(s)

r est un nombre réel ; k est un entier naturel

Début

$k := 0$ et $r := (1-p)^n$

Tant que $(r \leq \frac{1-s}{2})$ **Faire**

$k := k+1$

$r := r+$ Combinaison$(n,k) \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Fin Tant que

Afficher « $a =$ », k

Tant que $(r < \frac{1+s}{2})$ **Faire**

$k := k+1$

$r := r+$ Combinaison$(n,k) \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Fin Tant que

Afficher « $b =$ », k

Fin

```
PROGRAM:INTERVFL
:Prompt N,P,S
:0→K
:(1-P)^N→R
:While R≤(1-S)/2

:K+1→K
:R+binomFdp(N,P,
K)→R
:End
:Disp "A=",K
:While R<(1+S)/2

:K+1→K
:R+binomFdp(N,P,
K)→R
:End
:Disp "B=",K
```

```
F1▾    F2▾         F3▾ F4▾ F5      F6▾
Outils StructCtrl E/S Var Rech... Mode
:interflu(n,p,s)
:Prgm
:Local  k,r
:0→k
:(1-p)^n→r
:While r≤(1-s)/2
:k+1→k
:r+tistat.binomddp(n,p,k)→
 r
:EndWhile
:Disp "a=",k
:While r<(1+s)/2
:k+1→k
:r+tistat.binomddp(n,p,k)→
 r
:EndWhile
:Disp "b=",k
:EndPrgm
```

```
Define LibPub intervflucbin(n,p,s)=
Prgm
Local r,k
k:=0
r:=(1-p)^n
While r≤(1-s)/2
 k:=k+1
 r:=r+binomPdf(n,p,k)
EndWhile
Disp "a=",k
While r≤(1+s)/2
 k:=k+1
 r:=r+binomPdf(n,p,k)
EndWhile
Disp "b=",k
EndPrgm
```

Exercice 5 : Une machine fabrique des processeurs. On sait que la probabilité d'obtenir un processeur défectueux est $p = 0.06$. On contrôle des lots de 300 processeurs. Soit X une variable aléatoire représentant le nombre de processeurs défectueux sur ce lot. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres 300 et 0.06.

1. Déterminer la valeur du plus petit entier a tel que $p(X \leq a) > 0.025$.
2. Déterminer la valeur du plus petit entier b tel que $p(X \leq b) \geq 0.975$.
3. En déduire l'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille 300, de la variable X.
4. Le contrôle de la machine A donne 23 processeurs défectueux ; le contrôle de la machine B donne 28 processeurs défectueux. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6 : Taupie a mis des oeufs de pâques dans une boîte, les uns contiennent un cadeau, les autres non. On sait que :

- 30% des oeufs contiennent un cadeau.
- 40% des oeufs avec un cadeau sont bleus, les autres sont roses ;
- 75% des oeufs sans cadeau sont bleus, les autres sont roses.

Taupie choisit au hasad un oeuf dans la boîte. On admet que tous les oeufs ont la même probabilité d'être choisis.
On considère les événements suivants :

- C : « l'oeuf choisi contient un cadeau »
- B : « l'oeuf choisi est bleu »

1. Traduire les probabilités de l'énoncé sous forme mathématique.
2. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
3. Calculer la probabilité de l'événement B.
4. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.
5. Calculer la probabilité qu'un oeuf bleu contienne un cadeau.

Exercice 7 : Simplet, Goldorak et Monica Bellucci reviennent de la forêt avec trois paniers contenant respectivement 1, 2 et 3 champignons. Dans chaque panier, il y a un champignon vénéneux.
On choisit un des trois paniers au hasard, et dans ce panier on goûte un des champignons choisi lui aussi au hasard.
Quelle est la probabilité de se tordre de douleur puis de succomber dans d'atroces souffrances quelques minutes après ?
Un élève syldave qui passait par là a choisi un panier au hasard puis un champignon dans ce panier. On constate qu'il se tord de douleur puis succombe dans d'atroces souffrances : quelle est la probabilité qu'il ait goûté un champignon venant du panier de Monica Bellucci ?

Exercice 8 : Pour réussir une carrière politique en Corrèze, il faut une implantation locale. Dans cette perspective, un jeune énarque décide d'acquérir un château corrézien. Pour se faire connaître, il hante les commices agricoles du département. Il a ainsi deux chances sur trois d'être élu député. Si, par dessus le marché, il touche le derrière des vaches, cette probabilité passe à trois chances sur quatre. Il y a trois chances sur cinq pour que, son conseiller en communication lui ayant refilé le tuyau, il touche le derrière des vaches.

1. Calculer la probabilité pour qu'il soit élu député.
2. Il est député. Calculez la probabilité pour qu'il ait touché le derrière des vaches.

Exercice 9 : Marcel est distrait. Quand il part travailler, il oublie parfois de s'habiller et prend le tramway entièrement dévétu.
Quand il a voyagé la veille nu, il voyage nu une fois sur cinq le jour même ; sinon, une fois sur deux.
On note N_n l'événement « il voyage le $n^{\text{ième}}$ jour nu » et p_n sa probabilité.

1. Exprimez p_{n+1} en fonction de p_n.
   Réponse : $p_{n+1} = 1/2 - 3p_n/10$
2. On pose $u_n = p_n - 5/13$. Exprimez u_{n+1} en fonction de u_n.
   En déduire u_n en fonction de u_1 et n.
   Réponse : $u_n = u_1(-3/10)^{n-1}$
3. Exprimez alors p_n en fonction de n.
4. Montrez que la suite (p_n) est convergente et calculez sa limite.
   Réponse : $5/13$

Exercice 10 : Des études morphologiques de la Vénus de Milo montrent qu'il y a cinq chances sur sept pour qu'elle soit droitière et deux chances sur sept pour qu'elle soit gauchère. Si elle est droitière, il y a trois chances sur cinq pour qu'elle épluche des carottes et deux chances sur cinq pour qu'elle dénoyaute des olives. Si elle est gauchère, il y a une chance sur deux pour qu'elle épluche des carottes et une chance sur deux pour qu'elle dénoyaute des olives.

1. Calculez la probabilité pour qu'elle dénoyaute des olives.
   Réponse : $3/7$
2. Les noyaux trouvés sur le site archéologique de la statue permettent d'affirmer sans hésiter qu'elle dénoyaute des olives.
   Calculez la probabilité pour qu'elle soit gauchère.
   Réponse : $1/3$

Exercice 11 : On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).
Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).
On définit les évènements suivants :
D_1 : « le dé indique 1 » D_2 : « le dé indique 2 » D_3 : « le dé indique 3 » G : « la partie est gagnée ».
A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. **a.** Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$

   b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

Exercice 12 : *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.*
Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies.
Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

   a. $0,4$ **b.** $0,75$ **c.** $\dfrac{1}{150}$
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

   a. $0,3$ **b.** $0,8$ **c.** $0,4$
3. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est

   a. $1,15$ **b.** $0,4$ **c.** $0,3$
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

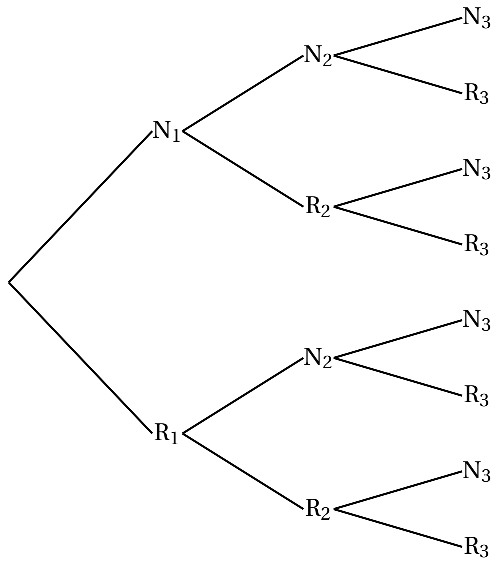
   a. $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

   a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** $0,3$
6. Le lecteur est venu 3 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

   a. $1-(0,25)^3$ **b.** $3 \times 0,75$ **c.** $0,75 \times (0,25)^3$

Exercice 13 : On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule Noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule Rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. a. Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.
   c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.
4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 14 : *On note* $p_A(B)$ *la probabilité conditionnelle de l'évènement* B *sachant que l'évènement* A *est réalisé.*
Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note A_0 l'évènement ; « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
   On note A_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire » ;
   On note A_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».
   Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
   On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note B_0 l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n^o 2 »
   On note B_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n^o 2 »
   On note B_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n^o 2 »
   a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
   b. En déduire $p(B_0)$.
   c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.
   d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'évènement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'urne ».
   Montrer que $p(R) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 15 : Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement : « Amélie est arrêtée par le n^{eme} feu rouge ou orange » et $\overline{\mathrm{E}_n}$ l'événement contraire (le feu orange est considéré comme un feu rouge).

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{\mathrm{E}_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $1/8$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées

- la probabilité que le $(n+1)^{eme}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{eme} feu est rouge ou orange, vaut $1/20$.
- la probabilité que le $(n+1)^{eme}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{eme} feu est vert, vaut $9/20$.

1. On s'intéresse tout d'abord aux deux premiers feux tricolores. Complétez un arbre pondéré rendant compte de la situation.
2. On se place maintenant dans le cas général.
   - **a.** Donnez les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{E}_{n+1})$ et $p_{\overline{\mathrm{E}_n}}(\mathrm{E}_{n+1})$.
   - **b.** En remarquant que $\mathrm{E}_{n+1} = (\mathrm{E}_{n+1} \cap \mathrm{E}_n) \cup (\mathrm{E}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{E}_n})$, montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{9}{20} q_n$$
   - **c.** Déduisez-en l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 28p_n - 9$.
   - **a.** Montrez que (u_n) est géométrique et déterminez sa raison.
   - **b.** Exprimez u_n puis p_n en fonction de n.
   - **c.** Déterminez la limite, si elle existe, de p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interprétez ce résultat.

Exercice 16 : On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix sont équiprobables), puis à effectuer lle tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'événement « l'urne a est choisie », B l'événement « l'urne b est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$ la probabilité conditionnelle de l'événement R par rapport à l'événement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.
   - **a.** Déterminez les probabilités $p(\mathrm{A})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{R})$.
   - **b.** Montrez que $p(\mathrm{R}) = 13/30$.
   - **c.** Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?
2. Dans cette question , l'urne a contient quatre boules blanches, l'urne b contient deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges et l'urne b en contient $(5-n)$, où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5.
   - **a.** Exprimez $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{R})$ en fonction de n.
   - **b.** Montrez que $p(\mathrm{R}) = \dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$
   - **c.** On sait que n ne prend que six valeurs entières.
   Déterminez la répartition des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur de $p(\mathrm{R})$.