EXERCICES
LE RAISONNEMENT PAR RÃĽCURRENCE

Exercice 1 : On donne ci-dessous trois propositions vraies.

1. Pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$
2. Pour tout réel $x > 0$, $(x+1)^3 \geq 1+3x$
3. Pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$

Pour lesquelles peut-on envisager une démonstration par récurrence (que l'on ne fera pas) ?

Exercice 2 : La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et pour tout n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Démontrer chacune des propositions suivantes.

1. La proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ » est héréditaire.
2. La proposition « $u_n \geq u_{n+1}$ » est héréditaire.
3. Si $u_0 = 1$ la suite u est croissante.
4. Si $u_0 = -2$, la suite u est décroissante.
5. Su $u_0 = -0.5$, la suite u est stationnaire.

Illustrer graphiquement les trois derniers résultats.

Exercice 4 :

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont héréditaires
   (A) : « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » (B) : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 »
2. Sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

Exercice 5 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n}$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2 \leq u_n \leq 3$

Exercice 6 :

1. Démontrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. On note S_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels non nuls.
   a. Calculer S_1, S_2 et S_3.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ (a)
   c. Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 3\,025$?
3. On note P_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels **pairs** non nuls.
   a. Calculer P_1, P_2 et P_3.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $P_n = 2n^2(n+1)^2$
   c. Quel est l'entier n pour lequel $P_n = 1\,800$?
4. On note I_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels **impairs** non nuls.
   a. Calculer I_1, I_2 et I_3.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_n = n^2(2n^2 - 1)$
   c. Quel est l'entier n pour lequel $I_n = 41\,328$?

(a). On utilisera la formule démontrée dans le cours sur la somme des n premiers entiers.

Exercice 7 : Montrer que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

Exercice 8 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Exercice 9 : Pour tout entier $n \geq 1$, on note la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$.
On rappelle la proposition suivante, énoncée en 1S, mais non démontrée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{on a} \quad f_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f_n'(x) = nx^{n-1}$$

1. Démontrer que pour $n = 1$ la proposition est vraie.
2. Vérifier que les formules de 1S pour $n = 2$ et $n = 3$ correspondent à la formule générale énoncée ci-dessus.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Exercice 10 : Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'**inégalité de Bernoulli** est vraie :

$$\forall x > 0 \text{ , on a } (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 11 :

1. Rappeler ce que signifie l'écriture $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$.
2. Compléter la propriété suivante, vu en première :
   Pour tous n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} =$
3. Ecrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
4. Démontrer que pour tous réels a et b on a
   $$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
5. Quel lien observe-t-on entre les coefficients de développement et le triangle de Pascal ?
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a :
   $$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$
   formule appelée **formule du binôme de Newton**.
7. *Application* : développer $(a+b)^5$ sans calcul.

Exercice 12 : Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n = 2^n$

Exercice 13 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$