Exercices
La tête dans les étoiles

Exercice 1 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $M(2;-4;1)$, $N(0;3;5)$ et $P(-1;2;0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}$ et $-3\overrightarrow{MP}+4\overrightarrow{PN}$

Exercice 2 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $A(-1;2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-4;0;-9)$ et $D(0;-2;1)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?
3. Que peut-on en conclure sur les longueurs AB et CD ?
4. Donner un parallélogramme formé par ces quatre points (attention à l'ordre des points !!)

Exercice 3 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $A(-1;1;3)$, $B(2;1;0)$ et $C(4;-1;5)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Les droites (AB) et (AC) sont-elles parallèles ?
3. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

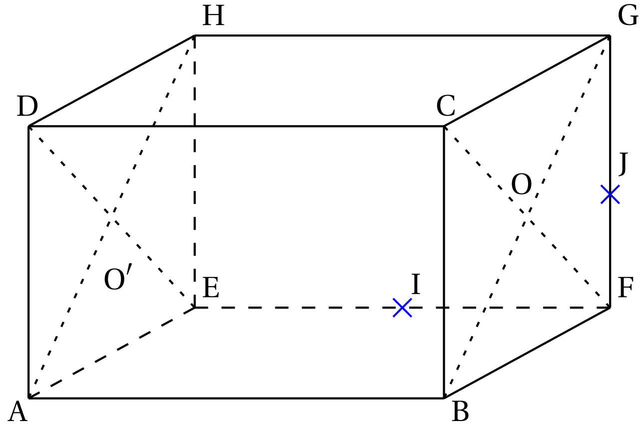
Exercice 4 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $M(2;0;3)$, $N(-1;3;4)$, $P(4;1;2)$ et $Q(-2;-1;0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (MN) et (PQ) ?

Exercice 5 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $A(2;-5;1)$, $B(-1;2;4)$, $C(3;4;-1)$ et $D(-2;3;2)$.
Soient I et J les milieux respectifs des segments [BD] et [AC], et G le centre de gravité du triangle ABC.
On définit K comme le point tel que $\overrightarrow{DK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$

1. Calculer les coordonnées des points I, J, G et K.
2. Justifier que K appartient au segment [IJ].

C. Aupérin
charlotte.auperin@ac-montpellier.fr



Dans les exercices suivants, on considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre.
Les points I, J sont les milieux des segments [EF] et [FG].
Les points O et O′ sont les centre respectifs des faces BCGF et ADHE.

Exercice 6 :

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
3. Que peut-on en déduire sur les droites (IJ) et (AC)?

Exercice 7 : Identifier les points R, S, T, U et V définis par :

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\quad;\quad \overrightarrow{HS}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}\quad;\quad \overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{DH}\quad;\quad \overrightarrow{BU}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\quad;\quad \overrightarrow{CV}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$

Exercice 8 :

1. Identifier les points M, N et P définis par :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}\quad;\quad \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\quad;\quad \overrightarrow{HP}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DA}$$

2. Construire K tel que $\overrightarrow{DK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$
3. Démontrer que C, K et I sont alignés.

Exercice 9 : Décomposer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AG}\,;\,\overrightarrow{AO}\,;\,\overrightarrow{BH}\,;\,\overrightarrow{CO'}\,;\,\overrightarrow{CO}\,;\,\overrightarrow{HI}\,;\,\overrightarrow{IJ}\,;\,\overrightarrow{IO'}$$

Exercice 10 : On se place désormais dans le repère $\left(E;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ et on sait que $\overrightarrow{EA}=3\vec{i}$, $\overrightarrow{EF}=5\vec{j}$ et $\overrightarrow{EH}=2\vec{k}$.

1. Déterminer les coordonnées de chacun des points de la figure.
2. Décomposer les vecteurs suivants en fonction des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$

$$\overrightarrow{AG}\,;\,\overrightarrow{FA}\,;\,\overrightarrow{GB}\,;\,\overrightarrow{OG}\,;\,\overrightarrow{ID}$$

Exercice 11 :

1. On considère deux peluches A et B de poids respectif a =500 g et b =2 kg. La distance entre les deux masses est AB = 50 cm.
   a. Faire un schéma de la situation.
   b. Où doit-on placer le point d'équilibre G sur le segment [AB] ?
   c. Répondre à la même question pour $a = 1$ kg et $b = 500$ g.
2. On a toujours AB = 50 cm mais cette fois les poids a et b sont inconnus.
   On sait que le point d'équilibre G de ces points vérifie : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
   a. Proposer deux masses a et b possibles.
   b. Démontrer, en décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

Exercice 12 : Dans chaque cas, préciser si le barycentre G des points (A, a) et (B, b) existe.
S'il existe, le construire.

$\rightsquigarrow$ $a = 1$ et $b = 1$ $\rightsquigarrow$ $a = 3$ et $b = 1$ $\rightsquigarrow$ $a = -1$ et $b = 2$ $\rightsquigarrow$ $a = 2$ et $b = -2$

Exercice 13 : A, B et G sont trois points distincts de l'espace.
Pour chacune des relations suivantes, dire si le point G peut être le barycentre des points pondérés A et B.
Si oui, préciser des coefficients affectés à ces points et construire G.

$\rightsquigarrow$ $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

$\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\rightsquigarrow$ $3\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{BG}$ $\rightsquigarrow$ $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$

Exercice 14 : A, B et C sont 3 points alignés de l'espace tels que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

1. Faire un schéma de la situation.
2. Proposer deux réels a et b tels que C soit le barycentre de (A, a) et (B, b).
3. Proposer de même deux réels b et c tels que A soit le barycentre de (B, b) et (C, c).
4. Exprimer de même B comme barycentre de A et C, affectés de coefficients à déterminer.

Exercice 15 : Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on donne les points $A(1 ; 3 ; -2)$ et $B(3 ; -1 ; 5)$.

1. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points $(A, 2)$ et $(B, -3)$
2. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I des points A et B. [a]

(a). L'isobarycentre de deux points est le barycentre de ces points affectés du même coefficient.

Exercice 16 : On considère trois points A, B et C du plan.
On appelle G le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,2)$ et H le barycentre de $(H,2)$ et $(C,2)$.
Placer les points A, B et C au hasard et construire les points H puis G.

Exercice 17 : Placer trois points A, B et C quelconque du plan.
Dans chaque cas, construire le barycentre G de ces points affectés des coefficients respectifs a, b et c suivants :

- $a = b = c = 1$
- $a = c = -2$ et $b = 2$
- $a = 3$, $b = 2$ et $c = 1$
- $a = 3$, $b = -4$ et $c = -2$

On pourra construire des barycentres partiels en faisant attention aux sommes nulles de coefficients.

Exercice 18 : A, B, C et G sont quatre points distincts de l'espace.
Pour chacune des relations suivantes, dire si le point G peut être le barycentre des points pondérés A, B et C.
Si oui, préciser des coefficients affectés à ces points et construire G.

- $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- $-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{BC}$

Exercice 19 : Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on donne les points $A(-2\,;\,4\,;\,1)$, $B(3\,;\,5\,;\,-1)$ et $C(0\,;\,3\,;\,4)$.

1. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points $(A,2)$, $(B,-1)$ et $(C,3)$
2. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I des points A, B et C.